



An Enhanced Model for Blind Source Separation under Source Variability Condition and its application in Hyperspectral Unmixing

Available in:
Journal.isrc.ac.ir

Journal of Space Science,
Technology & Applications
(Persian)

Vol. 6, No. 1, pp.: 74-90

2026

DOI:

[10.22034/jssta.2025.520680.1246](https://doi.org/10.22034/jssta.2025.520680.1246)

Afshin Ahmadloo^{1*}, Sadegh Samadi²

^{1*}Shiraz University of Technology, Department of Electrical Engineering,
Shiraz, Iran
afshin.ahmadloo.el@gmail.com

² Shiraz University of Technology, Department of Electrical Engineering,
Shiraz, Iran
samadi@sutech.ac.ir

Article Info

Received: 2025-05-02
Accepted: 2025-08-31

Keywords

Hyperspectral Imaging,
Blind Hyperspectral
Unmixing, Extended Linear
Mixing Model, Endmember
Variability, Blind Source
Separation

How to Cite this article

A. Ahmadloo, S. Samadi, "An
Enhanced Model for Blind
Source Separation under
Source Variability Condition
and its application in
Hyperspectral Unmixing",
*Journal of Space Science,
Technology & Applications*,
Vol. 6, No. 1, pp. 74-90, 2026.

Abstract

Spectral unmixing is an important topic in hyperspectral imaging as a source of identification and separation of different materials in different wavelengths, which is known as endmember signatures (EMs). Abundance is the proportion of these EMs. The process of extracting two above information is not fixed, because of variation of EMs and nonlinear mixing phenomena. Extended linear mixing model (ELMM) addresses this by allowing per-pixel endmember variations. While ELMM effectively captures certain type of endmember variability, it introduces a multiplicative ambiguity between abundances and scaling factors. Besides, ELMM can be ambiguous when variations arise from microscale material structure rather than changes in the endmembers themselves, or in the mixing of composite materials. To address these limitations, this paper proposes an improved ELMM (IELMM). IELMM considers that each pixel is allowed to vary freely in each frequency layer, as well as changes in relation to other pixels and EMs. Allowing more flexibility in EM structure modeling, leads to introduce a new approach in the area of unmixing based on novel mathematical framework. The new framework considers the source of variation in observation matrix with a 3-dimensional scaling factor array as a source of variation in endmember matrix. Besides, we have developed the required mathematical equations for optimizing blind hyperspectral unmixing results in improvement of precise unmixing and better convergence. Simulation results based on real and synthetic data sets confirm the efficiency of the proposed approach.

ارایه مدل توسعه یافته جداسازی منابع در شرایط کور با شرط وجود تغییر در منابع و به کار گیری آن در تجزیه تصاویر ابرطیفی

افشین احمدلو^{۱*}، صادق صمدی^۲

^{۱*} - دانشگاه صنعتی شیراز، دانشکده مهندسی برق، شیراز، ایران - afshin.ahmadloo.el@gmail.com

^۲ - دانشگاه صنعتی شیراز، دانشکده مهندسی برق، شیراز، ایران - samadi@sutech.ac.ir

نویسنده مسئول *

دسترس پذیر در نشانی:

Journal.isrc.ac.ir

دوفصلنامه علوم، فناوری و

کاربردهای فضایی

سال ششم، شماره ۱، صفحه ۹۰-۷۴

بهار و تابستان ۱۴۰۵

DOI:

10.22034/jस्ता.2025.520680.1246

چکیده

جداسازی منابع در داده‌های ابرطیفی، به معنای مشخص کردن مواد مختلف با طول موج‌های مجزا در متن تصاویر ابرطیفی است. هدف اصلی فرایند جداسازی، تعیین و تخمین دو پارامتر است: ۱- اعضای پایانی (S) - تعیین نسبت و میزان هر یک از این اعضا در تشکیل تصویر (A) . از طرفی، فرایند یافتن این دو پارامتر در تصاویر به واسطه عواملی از جمله تغییر در اعضای پایانی (تغییرات ذاتی یا بیرونی) و همچنین مساله ترکیب شدن غیر خطی این اعضا، ثابت و یکسان نیست. روش توسعه یافته ترکیب خطی پیشنهاد جالبی است که ضمن تکمیل روش ترکیب خطی، وجود تغییرات در اعضای پایانی را در مدل ریاضی ترکیب خطی لحاظ نموده است. با وجود مزایای عمده، این مدل در تغییرات میکروسکوپی اعضای پایانی دارای محدودیت به کارگیری است. همچنین، ابهام در استخراج ضریب تغییرات و نسبت اعضای پایانی در ترکیب در مدل وجود دارد. در این مقاله به منظور رفع این موضوعات، مدل بهبود یافته‌ی مدل قبل مبتنی بر ایده‌ای هندسی پیشنهاد شده است. این مدل بر مبنای مدل ترکیب خطی بنا شده تا از مزایای خطی بودن بهره‌مند شود، ضمن آنکه تغییرات اعضای پایانی را با مدلی دینامیک ارایه می‌نماید تا امکان مدل‌سازی هر نوع تغییری میسر شود. در مدل پیشنهادی آرایه‌ی سه بعدی جدیدی به نام (Ψ) معرفی می‌کنیم که دربرگیرنده‌ی تغییرات اعضای پایانی در هر سه محور عمود بر هم باشد و هوشمندانه با به کارگیری ضرب هادامارد، جزء به جزء اعضای این آرایه را با جزء به جزء اعضای پایانی (S) به هم متصل کرده‌ایم. با این کار وجود تغییر در سه بعد را برای هر یک از المان‌های اعضای پایانی لحاظ کرده‌ایم ضمن آنکه به صورت کمی آن را قابل محاسبه کرده‌ایم. در ادامه، با این تعریف جدید برای امکان تغییر اعضای پایانی، معادله بهینه‌سازی جدیدی برای حل مساله جداسازی ارایه کرده‌ایم که بر مبنای ریاضیات ترکیبی حاصل از ضرب ماتریسی و ضرب هادامارد در ساختار معادلات ماتریسی است. حل معادله بهینه‌سازی پیشنهادی، به دو معادله جدید دیگر منجر می‌شود که استخراج پارامترهای مطلوب (ماتریس A و آرایه S) را با سرعت و دقت بیشتری امکان‌پذیر می‌سازد. شبیه‌سازی‌ها صحت و کارایی طرح پیشنهادی را تایید می‌کنند.

تاریخچه داوری

دریافت: ۱۴۰۴/۰۲/۱۲

پذیرش: ۱۴۰۴/۰۶/۰۹

واژه‌های کلیدی

جداسازی منابع در شرایط کور،

جداسازی تصاویر ابرطیفی، مدل

ترکیب خطی، مدل ترکیب خطی

توسعه یافته، اعضای پایانی متغیر

نحوه استناد به این مقاله

افشین احمدلو، صادق صمدی، "ارایه مدل توسعه یافته جداسازی منابع در شرایط کور با شرط وجود تغییر در منابع و به کار گیری آن در تجزیه تصاویر ابرطیفی"، دوفصلنامه علوم، فناوری و کاربردهای فضایی، جلد ششم، شماره اول، صفحات ۹۰-۷۴، ۱۴۰۵.

۱- مقدمه

جداسازی منابع در شرایط کور^۴ و دقت در انجام آن را روشن می سازد. شعاع نوری دریافتی در دهانه دوربین ابرطیفی، جمع جبری طول موج های مختلف است و عموماً فاصله دوربین از ناحیه تصویربرداری بسیار زیاد است، از این رو، جداسازی دقیق، نیازمند نسبت سیگنال به نویز بالاست و این موضوع متناظر با انتخاب ابعاد بزرگ پیکسل است. از طرفی انتخاب ابعاد بزرگ پیکسل معادل کاهش رزولوشن مکانی است. از این رو، این مقابله در انتخاب ابعاد پیکسل در آنالیز داده برداری ابرطیفی همواره وجود دارد [۵]. بر این اساس برای حل مساله جداسازی دو مدل مطرح است: الف- مدل پیکسل خالص^۵ که در آن پیکسل مورد نظر شامل یک عضو پایانی^۶ است و بنابراین دارای یک امضای طیفی^۷ خواهد بود. ب- مدل دوم که یک پیکسل از تعدادی اعضای پایانی تشکیل شده است و هر عضو پایانی دارای امضای طیفی منحصر به فردی است. این مدل با توجه به فاصله دوربین تا صحنه و نیاز به سیگنال به نویز بالا و متقابلاً ابعاد بزرگتر پیکسل، با بسیاری از مسایل جداسازی، تطبیق بهتری دارد و بنابراین، ما در مسایل این مدل را در نظر می گیریم. این مدل را اصطلاحاً مدل ترکیب خطی^۸ نامیده اند. بسیاری از مسایل با این شرایط سازگارند. در این مدل یک پیکسل از تعدادی مواد مختلف تشکیل شده که اصطلاحاً به این مواد اعضای پایانی یا امضاهای طیفی اعضای پایانی می گویند. نسبت و میزان این اعضای پایانی در تشکیل یک پیکسل اصطلاحاً اباندنس^۹ نامیده می شود [۶]. این مدل خصوصاً در صورتی که زاویه دید دوربین گسترده و وسیع و مسطح از ناحیه ای باشد که تنها از یک ماده تشکیل شده باشد، مدلی قابل قبول و دقیق است. به عبارت دیگر مدل ترکیب خطی، مدلی با ترکیب ماکروسکوپی در اعضای پایانی به شمار می آید [۷، ۸]. بسیاری از محققین در موضوع جداسازی از این مدل استفاده می کنند چراکه در به کارگیری، مدلی ساده است و همچنین در جداسازی، تخمینی قابل قبول از اعضای پایانی ارائه می دهد [۹]. با وجود مزایای بیان شده، این مدل دارای محدودیت هایی نیز هست که به کارگیری آن را تحت تاثیر قرار داده است. این مدل برای ترکیبات غیر خطی^{۱۰} اعضای پایانی [۲،

منظور از جداسازی منابع در داده های ابرطیفی استخراج مواد مختلف با طول موج های مجزا از متن تصاویر ابرطیفی است. در مساله جداسازی منابع به دنبال دو داده اصلی هستیم. منابع (اعضای پایانی S) و نسبت و میزان مشارکت این اعضا در تشکیل تصویر یعنی (اباندنس A) و آنچه به عنوان ورودی مساله در اختیار است، ماتریس مشاهدات (X) است. نکته مهم اینکه در جداسازی منابع، هیچ اطلاعات و داده ی دیگری جز ورودی در اختیار نیست و اساساً در بحث جداسازی تنها شرطی که باید برقرار باشد اینکه این منابع از هم مستقل هستند به همین دلیل به آن واژه ی کور اطلاق می شود [۱]. در این پژوهش به این موضوع پرداخته می شود و این موضوع در شرایطی دنبال می شود که منابع ثابت نیستند و دارای تغییرات (ذاتی یا تغییرات ناشی از عوامل بیرونی) هستند. ما در این کار، این تغییرات را نیز بررسی می کنیم و علاوه بر حل مساله جداسازی، راهکاری برای محاسبه تغییرات منابع به صورت کمی ارائه می نماییم و این موضوع را با داده های تصویری ابرطیفی^۱ به عنوان ورودی مورد ارزیابی قرار می دهیم. تصویربرداری ابرطیفی را می توان معادل برداشت از یک صحنه در بیش از صد طول موج نزدیک به هم تعریف کرد. دوربین های تصویربرداری ابرطیفی در طول موج های ۴۰۰ تا ۱۱۰۰ نانومتر در محدوده بینایی تا نزدیک به مادون قرمز^۲ داده برداری می کنند [۱، ۲]. خصوصیت ذاتی این تصاویر، رزولوشن طیفی بالاست. از این رو، هدف اصلی این نوع تصویربرداری، شناسایی دقیق اجزای تصویر است. گستره ی تصویربرداری ابرطیفی و تجزیه اجزای تصویر^۳، بسیار وسیع است. اکتشافات فضایی، مونیتورینگ عوارض زمین، شناسایی لایه های مختلف زمین از دیدگاه استخراج نفت، یافتن منابع آب زیرزمینی تا شناسایی ذخایر و معادن و تغییرات نواحی مختلف و عوارض زمین در گذر زمان از آن جمله است [۱، ۳]. از کاربردهای نظامی به طور کلی می توان به شناسایی و تفکیک نوع ادوات، شناسایی نواحی استتار شده و تشخیص جنس استحکامات زیر خاک اشاره کرد. در حوزه پزشکی می توان به استفاده از این نوع تصویربرداری در شناسایی تومور و به کارگیری آن در انجام جراحی های دقیق اشاره نمود [۴]. توجه به این میزان تنوع در کاربرد، اهمیت موضوع

4- Blind Source Separation

5- Purity Pixel Model

6- Endmember

7- Endmember Signature

8- Linear Mixture Model (LMM)

9- Abundance

10- Mixture with Non-Linear mixing

1- Hyperspectral Imaging

2- Near IR

3- Spectral Unmixing

سه بعدی جدید به نام (۷) به عنوان ضریب تغییرات با المان‌های اعضای پایانی کوپل شده کامل می‌شود. حل معادله بهینه‌سازی پیشنهادی، به دو معادله جدید منجر می‌شود که تخمین اعضای پایانی (S) و ماتریس‌های ابادندس (A) را با دقت و سرعت همگرایی بهتری میسر می‌سازد. در ضمن آرایه‌ی سه بعدی پیشنهادی، که در میانه‌ی استخراج دو پارامتر مطلوب محاسبه می‌شود، تعیین کننده‌ی تغییرات کمی و جزء به جزء اعضای پایانی در باندهای مختلف فرکانسی است. با محاسبه این مقادیر توانسته‌ایم مقدار عددی تغییرات را برای هر عضو پایانی در تمام لایه‌های فرکانسی به دست آوریم (موضوعی که تاکنون مقدور نبوده است). در واقع در این مقاله ساختاری ریاضی برای حل مساله جداسازی با وجود تغییرات دینامیک در اعضای پایانی ارائه شده است، به نحوی که مقادیر کمی تغییرات المان به المان برای هر عضو پایانی مشخص و قابل حصول باشد. در ادامه، شبیه‌سازی‌هایی با داده‌های حقیقی و همچنین مصنوعی^{۱۶} انجام شد که کارایی و صحت روش ارائه شده را اعتبار می‌بخشد.

ادامه بخش‌بندی مقاله به صورت زیر است: در بخش (۲)، موضوع تغییرات اعضای پایانی مطرح می‌شود. در بخش (۳)، مدل ترکیب خطی بیان می‌شود. در بخش (۴)، مدل توسعه یافته ترکیب خطی مطرح می‌شود. مدل پیشنهادی در بخش (۵) بیان شده و در بخش (۶)، شبیه‌سازی‌ها مطرح خواهند شد و نهایتاً در بخش (۷)، به نتیجه‌گیری پرداخته می‌شود.

۲- تغییرات اعضای پایانی^{۱۷}

مواد مختلف دارای تغییرات در امضاهای طیفی خود هستند. این موضوع پدیده‌ای اجتناب‌ناپذیر است. این تغییرات به دو دسته کلی تقسیم می‌شوند: الف- تغییرات ذاتی مواد، ب- تغییرات بیرونی مواد.

تغییرات ذاتی در مواد متأثر از تغییر در ساختار الکتروشیمیایی مواد است که این تغییرات به تغییر در مشخصه طیفی آنها منجر می‌شود. از بارزترین نمونه این تغییرات می‌توان به تغییر در مشخصه طیفی یک مزرعه ذرت به واسطه تغییر در میزان کلروفیل برگ‌ها در طول روز به دلیل تغییرات تابش خورشید را نام برد [۱۰]. این نمونه از تغییرات را ذاتی نامند.

شناسایی مواد مرکب^{۱۱} (کامپوزیت) [۱۰]، و همچنین در شرایطی که اعضای پایانی دارای تغییرات (ذاتی و یا تغییرات خارجی)^{۱۲} باشند [۱۱]، مدلی ضعیف و نامناسب است. برای حل این مساله، مدل توسعه یافته ترکیب خطی^{۱۳} در سال ۲۰۱۶ به منظور رفع نواقص این مدل پیشنهاد شد. در این مدل به اعضای پایانی ضریبی اختصاص یافت که به اندازه آن ضریب، امکان جابه‌جایی اعضای پایانی در پیکسل مجاور میسر شد. تعداد این ضرایب برابر تعداد اعضای پایانی بود. این ضرایب با یک ماتریس قطری در مدل ترکیب خطی موجود اضافه و جایگذاری شد و نام آن مدل توسعه یافته ترکیب خطی نامیده شد [۲]. این نوآوری باعث شد تا بسیاری از مسایل و محدودیت‌های موجود و بیان شده در فوق حل شوند و موضوع جداسازی با وجود تغییرات اعضای پایانی، مساله‌ای حل شده محسوب شود. با وجود نگرش هوشمندانه درومتز^{۱۴} و همکاران در ارائه این طرح، مسایلی در ادامه مطرح شد که نیاز به ارائه مدلی بهینه و کامل‌تر را ایجاب نمود که به اختصار بیان می‌شود: الف- در این مدل ابهام حاصل از حاصل ضرب بین ضرایب تغییر و ابادندس در رابطه مطرح شده وجود داشت [۷]، ب- میزان دقت روش مطرح شده مشخص نبود، ج- مشکل در جداسازی مسایل با ترکیب غیرخطی در مواد کامپوزیت (میکروسکوپیک) به قوت خود باقی بود، د- یک دیدگاه و بیان تئوریک عمیق ریاضی برای بیان جزئیات ترکیب اعضای پایانی و تغییرات موجود در آن وجود نداشت [۱۲]. در پاسخ به این موضوع، در این مقاله مدلی برای مساله جداسازی مطرح شده است که دینامیک است. با شرایط تغییرات اعضای پایانی (اعم از ذاتی یا تغییرات بیرونی) بسیار بهتر منطبق است. معیاری کمی برای تغییرات و میزان آن تغییرات ارائه می‌کند و بسیاری از محدودیت‌های موجود در مدل قبل را پوشش داده و پاسخگو است. این مدل را بهبود یافته مدل قبل IELMM^{۱۵} نامیده‌ایم. در مدل ارائه شده، اعضای پایانی در سه بعد امکان جابه‌جایی دارند. از این‌رو، هر گونه تغییرات (اعم از تغییر در راستای اعضای پایانی، تغییر در لایه‌های فرکانسی و همچنین در جهت پیکسل‌ها) در این مدل پیش‌بینی شده است. این پیشنهاد با ارائه مدلی ریاضی در معادله اصلی بهینه‌سازی که در آن آرایه‌ای

¹¹- Composite Material

¹²- Intrinsic or Extrinsic Variability

¹³- Extended Linear Mixing Model (ELMM)

¹⁴- Drumetz et al.

¹⁵- Improved Extended Linear Mixing Model (IELMM)

¹⁶- Synthetic Data

¹⁷- Endmember Variability

در این رابطه $X \in R^{L \times N}$ ماتریس مشاهدات و $S \in R^{L \times P}$ ماتریس مشخصه اعضای پایانی است. $A \in R^{P \times N}$ ماتریس اباندنس و $E \in R^{L \times N}$ نویز گوسین است. N تعداد پیکسل‌ها در هر لایه است. P تعداد اعضای پایانی و L تعداد باندهای فرکانسی^{۱۸} است. معادله (۱) در شکل گسترده‌ی آن برای هر بردار ستونی X_n از ماتریس مشاهدات به صورت زیر قابل بیان است:

$$x_n = \sum_{p=1}^P a_{pn} \cdot S_p + e_n = S \cdot a_k + e_k \quad (2)$$

در این رابطه ترم S_p ، p امین بردار ستونی از ماتریس اعضای پایانی است. $a_{pn} \geq 0$ است تا محدودیت ANC^{۱۹} حفظ شود [۲]. این محدودیت بدین معناست که هیچ یک از اعضای پایانی با وزن منفی در ترکیب شرکت نمی‌کنند. شرط دیگری که باید برقرار باشد آنکه:

$$\sum_{p=1}^P a_{pn} = 1, \quad \forall n \quad (3)$$

این محدودیت را ASC^{۲۰} می‌نامند [۲]، بدین معنا که هر پیکسل به صورت کامل با جمعی مشخص از اعضای پایانی قابل توصیف است. روش ترکیب خطی با تمام ویژگی‌های مثبتی که دارد، دارای نواقصی است که کاربرد آن را محدود می‌سازد. این روش در شرایطی که اعضای پایانی دارای تغییرات هستند (اعم از تغییرات ذاتی یا بیرونی)، دارای ضعف است و در صورت وجود تغییر در اعضا، مدل مناسبی به شمار نمی‌آید. محدودیت در به‌کارگیری LMM نیاز به ارایه مدلی کامل‌تر را به وجود آورد. از این‌رو، مدل توسعه‌یافته ترکیب خطی در پاسخ به این نیاز ارایه شد.

۴- مدل توسعه‌یافته ترکیب خطی

مدل توسعه‌یافته ترکیب خطی (ELMM) بر پایه مدل LMM بنا نهاده شد با این فرض اضافه که اعضای پایانی در این مدل می‌توانند تغییر داشته باشند و این تغییر در محدوده پیکسل‌های مجاور است اما موضوع خطی بودن حفظ می‌شود. تغییرات در این مدل در ضرایبی در نظر گرفته شد که این ضرایب

اما تغییرات بیرونی عموماً متأثر از تغییر در عوامل بیرونی یا محیطی است مانند تغییر در شرایط تابش اشعه نورانی یا تغییر در زاویه برخورد شعاع نورانی به صحنه مورد نظر، تغییرات اتمسفری و تغییر در زاویه موج دریافت شده در دیافراگم دوربین از این دسته‌اند [۱۲]. این عوامل باعث بروز تغییر در مشخصه طیفی مواد می‌شوند که مجموعه آنها را تغییرات بیرونی می‌نامند. هر دو دسته‌ی این تغییرات باعث بروز جابه‌جایی در مشخصه طیفی مواد می‌شوند. بنابراین، معرفی مدلی که بتواند این تغییرات را نیز در کنار تعیین مشخصه طیفی مواد شناسایی و اندازه‌گیری نماید، موضوعی مهم در بحث جداسازی در شرایط کور است. در این مقاله، مدلی ارائه شده است که المان‌های اعضای پایانی جزء به جزء با المان‌های آرایه‌ی سه بعدی پیشنهادی کوپل شده و سپس، این کوپلینگ در معادله اصلی بهینه‌سازی اعمال شده است. بنابراین، هر نوع تغییر در هر بعد از اعضای پایانی S_p در مدل، پیش‌بینی شده است. با این پیشنهاد، قابلیت انعطاف بالایی در مدل ELMM قبل ایجاد شده است که پاسخگوی دسته وسیعی از تغییرات باشد و نواقص موجود در بحث جداسازی را جبران نماید.

۳- مدل ترکیب خطی

این مدل یکی از پرکاربردترین مدل‌ها در مبحث جداسازی طیفی است. در این مدل، ماتریس مشاهدات، ترکیبی خطی از اعضای پایانی است که با مقادیر اباندنس هر عضو وزن‌دهی شده است. هر عضو به وسیله یک امضای طیفی منحصر به فرد مشخص می‌شود. کاربرد این مدل عموماً در مواردی است که پیکسل مورد نظر از یک نوع ماده تشکیل شده باشد. به عبارت دیگر، بهترین شرایط کارایی این روش زمانی است که زاویه دید دوربین، گستره‌ی وسیع و مسطح از ناحیه‌ای باشد که تنها از یک ماده خالص تشکیل شده باشد [۷، ۸]. مدل ترکیب خطی مدلی کاربردی و در عین حال، ساده از لحاظ پیاده‌سازی محسوب می‌شود. از ویژگی‌های مثبت به‌کارگیری این روش، دستیابی به تخمینی اولیه از مشخصه اعضای پایانی با دقتی قابل قبول است [۹]. شکل ماتریسی مدل ترکیب خطی به صورت زیر است:

$$X = S \cdot A + E \quad (1)$$

¹⁸ - Frequency Layers

¹⁹ - Abundance No negative Constraint

²⁰ - Abundance Sum to one Constraint

در مدل ترکیب خطی پیاده سازی شد. پیشنهاد هوشمندانه درومتز و همکاران در ارایه این روش توانست بسیاری از آزمون های عملکردی را با موفقیت پشت سر بگذارد. با وجود آنکه مدل ELMM در بسیاری موارد کاربرد داشت، محدودیت هایی در به کارگیری آن مشاهده شد که به شرح زیر بیان می شود: الف- این مدل در شرایطی که اعضای پایانی بدون تغییر بودند اما تغییرات در ساختار درونی (میکروسکوپی) ماده وجود داشت، دارای ضعف بود. ب- در جداسازی مواد مرکب (میکروسکوپی) کارایی مناسبی نداشت. ج- در این مدل ابهام حاصل از حاصل ضرب بین ضریب تغییر و اباندنس در رابطه مطرح شده وجود داشت [۷]. د- تغییرات در تمام لایه ها یکسان در نظر گرفته شده بود و تنها وابسته به شماره عضو پایانی بود [۲]. در مجموع مدل ELMM با تمام مزایایی که داشت نیازی جدید را ایجاد کرد. نیاز به ارائه مدلی ریاضی که عمیق تر موضوع جداسازی با وجود تغییرات در اعضای پایانی را تجزیه و تحلیل نماید [۱۲]. این مقاله در پاسخ به این نیاز ارایه شده است.

۵- روش پیشنهادی

در این بخش برای حل مساله جداسازی روشی دینامیک پیشنهاد می شود که بیشتر و بهتر با فیزیک موضوع اعضای پایانی و تغییرات آن منطبق است. اعضای پایانی در این مدل می توانند آزادانه تغییرات داشته باشند و امکان وجودی تغییر، برای اعضای پایانی در روابط ریاضی به شکل منطقی تری پیش بینی شده است. در این روش آرایه ای سه بعدی معرفی می شود و تمامی المان های این آرایه با المان های متناظر در اعضای پایانی مرجع جزء به جزء به هم متصل می شوند. تمامی تغییرات احتمالی در اعضای پایانی در این آرایه پیشنهادی، مدل می شود. این تغییر در مدل کردن اعضای پایانی، در تابع اصلی بهینه سازی^{۲۲} اعمال می شود و بنابراین تابعی جدید ایجاد می شود که بیان کننده مدلی کامل تر از مدل های قبل، در موضوع جداسازی در شرایط کور است. از حل تابع بهینه سازی پیشنهاد شده، دو معادله جدید به دست می آید که پارامترهای مورد نظر در مساله جداسازی (آرایه ای مشخصه اعضای پایانی S و ماتریس اباندنس A) را با دقت و سرعت بهتری تخمین می زنند. مضاف بر اینکه آرایه ای سه بعدی (Ψ) نیز تخمین زده

در اعضای پایانی مرجع ضرب می شدند [۲]. به عبارت دیگر برای عضو پایانی p در ماتریس اعضای پایانی ($S \in R^{L \times P}$)، یک وزن منحصر به فرد Ψ_p در نظر گرفته می شود. در واقع چنین فرض می شود که ماتریس اعضای پایانی به دو بخش تقسیم شوند. یک بخش اعضای پایانی مرجع^{۲۱} که ثابت و بدون تغییر هستند ($S_0 \in R^{L \times P}$) و بخش دوم که ماتریسی قطری است و در ماتریس فوق ضرب می شود، ضرایب (وزن) این ماتریس است. ماتریس دوم، ماتریس Ψ_P نامیده شد. در واقع هر یک از اعضا با یک ضریب که در قطر ماتریس ضرایب قرار گرفته بود، به اندازه آن ضریب، می توانست دارای تغییرات باشد. شکل گسترده این مدل برای پیکسل k ام به صورت زیر بیان می شود:

$$\mathbf{x}_k = \sum_{p=1}^P a_{pk} f_{pk}(\mathbf{S}_p) + \mathbf{e}_k; \quad (4)$$

در این رابطه $\mathbf{x}_k$ برداری ستونی در موقعیت k امین پیکسل ماتریس مشاهدات است. a_{pk} مقدار اباندنس برای k امین پیکسل در عضو پایانی p ام است. تابع f_{pk} نماد تغییرات برای عضو پایانی p ام است و ترم $\mathbf{e}_k$ بردار ستونی نویز گوسین است. این رابطه را می توان به صورت دقیق تر به صورت زیر بیان کرد:

$$\mathbf{x}_k = \sum_{p=1}^P a_{pk} \Psi_{pk} \mathbf{S}_{0p} + \mathbf{e}_k = \mathbf{S}_0 \Psi_k \mathbf{a}_k + \mathbf{e}_k; \quad (5)$$

در این رابطه $\Psi_k \in R^{P \times P}$ یک ماتریس قطری است که در آن $\Psi_{ii} \geq 0$ است و عناصر روی قطر اصلی آن، ضرایب اعضای پایانی برای هر عضو است [۷]. با رابطه بیان شده اعضای پایانی می توانند در پیکسل مجاور به اندازه ضریب تعریف شده، تغییرات داشته باشند و این ضریب مختص p امین عضو پایانی است. با این تعریف به تعداد P تا عضو پایانی، ضریب تغییر وجود دارد و مهم تر اینکه این ضریب برای هر عضو پایانی در تمام باندهای فرکانسی یکتاست [۲]. دو شرط و محدودیت ASC و ANC همچنان برقرار است چرا که ضرایب به داخل ماتریس Ψ انتقال یافته اند. با این پیشنهاد در مدل ریاضی ترکیب خطی، بخشی از محدودیت های موجود در مدل ترکیب خطی رفع شد و مساله امکان وجود تغییر در اعضای پایانی

²² - Main Optimization Function

²¹ - Reference Endmembers

$$\mathbf{x}_k = (\mathbf{S}_{0(L \times P)} \square \Psi_{(L \times P)})_k \cdot \mathbf{a}_k + \mathbf{e}_k; k=1, 2, \dots, N \quad (8)$$

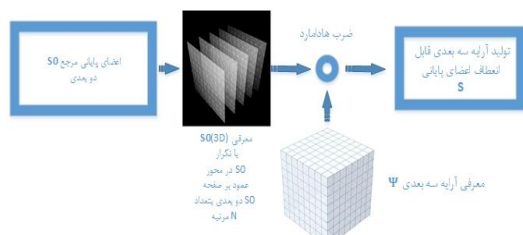
معادله (۸) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{S}_k \cdot \mathbf{a}_k + \mathbf{e}_k; k=1, 2, \dots, N \quad (9)$$

با توجه به معادلات (۸) و (۹) فرم ماتریسی $\mathbf{X}$ و $\mathbf{A}$ و $\mathbf{S}$ را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N]; \mathbf{X} \in \mathbf{R}^{L \times N} \\ \mathbf{A} &= [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_N] \\ \mathbf{E} &= [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_N] \end{aligned} \quad (10)$$

در این رابطه $\mathbf{X}$ ماتریس مشاهدات است و در آن $\mathbf{x}_k$ ، k امین بردار ستونی است. $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{P \times N}$ ماتریس اباندنس است و در آن $\mathbf{a}_k$ ، k امین بردار ستونی است. $\mathbf{E} \in \mathbf{R}^{L \times N}$ نویز گوسین است و در آن $\mathbf{e}_k$ ، k امین بردار ستونی است. $(N=n \times m)$ برابر تعداد کل پیکسل‌ها در هر صفحه (لایه) از تصویر است و m و n برابر تعداد سطرها و ستون‌های هر لایه از تصویر در داده‌های ابرطیفی است. همچنین ترم $(\mathbf{S}_{0(L \times P)} \odot \Psi_{L \times P})$ در معادله (۸) معادل k امین صفحه از آرایه $\mathbf{S}_k$ است که ابتدا در k امین صفحه از آرایه Ψ المان به المان ضرب شده و حاصل آن در بردار ستونی k ام از ماتریس اباندنس $\mathbf{A}$ ضرب می‌شود. با آرایه این ساختار از ماتریس مشاهدات و تشکیل ستون‌های این ماتریس با استفاده از اعضای پایانی و ضرایب این اعضا، مساله‌ی اولیه خطی بودن LMM در معادله (۱) را با معادلات (۸) و (۱۰) لحاظ کرده‌ایم.



شکل (۱): نحوه تولید آرایه قابل انعطاف $\mathbf{S}$

می‌شود که تاکنون وجود نداشته و آن آرایه، بیان کننده تغییرات کمی اعضای پایانی به صورت جزء به جزء برای هر المان است. با این فرایند هرگونه تغییر در اعضای پایانی در هر جهت (در جهت اعضای پایانی، در جهت پیکسل‌ها، و در جهت لایه‌ها، در سه بعد)^{۲۳} امکان‌پذیر شده و قابل محاسبه خواهد بود. بر اساس این پیشنهاد ماتریس قطری $\Psi_k \in \mathbf{R}^{P \times P}$ در روش ELMM به آرایه‌ای سه بعدی با ابعاد $(L \times P \times N)$ تبدیل می‌شود که به تعداد $(L \times P \times N)$ عضو غیر صفر دارد. همچنین در این مدل ماتریس اعضای پایانی $\mathbf{S}_0$ ، که دارای ابعاد $(L \times P)$ در مدل ELMM است به آرایه‌ای سه بعدی با ابعاد $(L \times P \times N)$ تبدیل می‌شود. برای انجام این کار ماتریس اعضای پایانی مرجع $(\mathbf{S}_0)$ را بر محور عمود بر صفحه‌ی $(L \times P)$ ، به تعداد N بار (معادل N لایه از آرایه تعریف شده‌ی Ψ) تکرار می‌کنیم (روی هم می‌چینیم) تا آرایه سه بعدی $\mathbf{S}_0$ با اعضای یکسان در هر صفحه تولید شود (مطابق شکل ۱ و معادله (۶)).

$$\mathbf{S}_{0(L \times P)} \Rightarrow \mathbf{S}_{0(L \times P) \text{rep}(N)} = \mathbf{S}_{0(L \times P \times N)} \quad (6)$$

سپس این آرایه را به صورت جزء به جزء با المان‌های آرایه Ψ به صورت زیر کوپل می‌کنیم. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_{0(L \times P \times N)} \square \Psi_{(L \times P \times N)} \quad (7)$$

در معادله (۷) نماد " $\odot$ " نماد ضرب هادامارد^{۲۴} (ضرب جزء به جزء المان‌ها) است. با این راهکار در مواد مرکب هر تغییری که در هر جهت (در سه بعد مکعب: در جهت اعضای پایانی (P) ، در جهت لایه‌ها (L) و در جهت پیکسل‌ها (N)) برای اعضای پایانی اتفاق افتد، در مساله جداسازی در نظر گرفته و مدل شده است.

۵-۱- فرمول‌بندی مساله

بر اساس مدل ریاضی فوق در معرفی آرایه‌های Ψ و $\mathbf{S}$ و اتصال این دو آرایه به هم، مدل ارتقایافته (IELMM) برای پیکسل k ام به صورت زیر تعریف می‌شود:

²³ - In L and P and N directions(3-D in a cube of data)

²⁴ - Hadamard Product

۲-۵- معرفی تابع هدف مساله بهینه سازی

با توجه به تعریف ارایه شده برای آرایه S و مدل ارائه شده در معادلات (۹) و (۱۰) تابع هدف پیشنهادی برای مساله بهینه سازی به منظور جداسازی منابع در روش ارایه شده (IELMM) بر حسب سه پارامتر A, S, Ψ به صورت زیر معرفی می شود:

$$\begin{aligned} H(S, \Psi, A) = & \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\|x_k - S_k a_k\|_2^2 + \\ & \lambda_s \|S_k - (S_0 \square \Psi)_k\|_F^2 + \text{reg}(\Psi_k)) + \text{reg}(A) \\ \text{reg}(A) = & I_R^+(A) + \mu^T (A^T \mathbf{1}_p - \mathbf{1}_N) + \\ & \lambda_A SR(A) = \lambda_A (\|H_h(A)\|_{2,1} + \|H_v(A)\|_{2,1}) \\ & + I_R^+(A) + \mu^T (A^T \mathbf{1}_p - \mathbf{1}_N) \\ \text{reg}(\Psi_k) = & \frac{\lambda_\Psi}{2} (\|H_{\Psi v}(\Psi_k)\|_F^2 + \|H_{\Psi h}(\Psi_k)\|_F^2) \end{aligned} \quad (11)$$

که در این رابطه S_k ، k امین صفحه از آرایه S با ابعاد $(L \times P)$ است. H_v اپراتورهای افقی و عمودی گرادیان تصویر با ابعاد $(P \times N)$ اند. این اپراتورها روی تمام صفحات (لایه های) تصویر پیکسل به پیکسل لغزش داده می شوند. $H_{\Psi v}$ و $H_{\Psi h}$ اپراتورهای افقی و عمودی گرادیان تصویر روی صفحات آرایه Ψ اند که پیکسل به پیکسل روی تمامی صفحات این آرایه با توجه به اندیس k (شماره پیکسل) لغزش داده می شوند. ابعاد این دو اپراتور $(L \times P)$ است. μ^T بردار ستونی پارامترهای ضرب لاگرانژین برای برقراری محدودیت ASC است. λ_A و λ_Ψ پارامترهای تنظیم کننده سرعت همگرایی در حلقه های تکرار هستند. I_R^+ تابع علامت با ابعاد $(P \times N)$ روی ماتریس A است. ترم 1_c برداری ستونی شامل یکها است. طول بردار برابر اندیس تابع است. ترم $SR(A)$ نشان دهنده تنظیم کننده مکانی روی ماتریس A است. برای به دست آوردن متغیرهای A, S, Ψ باید تابع هدف پیشنهاد داده شده در (۱۱) کمینه شود. حل این معادله به طور همزمان نسبت به سه پارامتر ناهمگراست. از این رو، باید معادله (۱۱) را نسبت به هر یک از پارامترهای S, A, Ψ به صورت جداگانه مینیمم کرد تا نقطه بهینه مربوط به هریک به دست آید. سپس در یک حلقه کنترلی تکرار شونده (مطابق الگوریتم ۱)، نقطه بهینه نهایی حاصل از به روزرسانی هر متغیر و اعمال آن در متغیر بعدی تا رسیدن به جواب نهایی مطابق شبه کد بیان شده در ذیل (الگوریتم ۱) به دست می آید.

برای انجام عملیات جداسازی تنها ورودی در دسترس ماتریس مشاهدات است. ورودی دیگری که نیاز داریم، ماتریس اجزای پایانی مرجع (S_0) است. بنابراین، اولین قدم در جداسازی اجزای تصویر ابرطیفی^{۲۵}، استخراج S_0 است. برای انجام این کار روش های مختلفی وجود دارد که از آن جمله می توان به الگوریتم MVSA^{۲۶}، الگوریتم N-FINDR و الگوریتم VCA^{۲۷} اشاره نمود. با توجه به استدلال و مقایسه انجام شده در مقاله ناسیمنتو و دیاس^{۲۸} در خصوص بهینه بودن الگوریتم VCA در مقایسه با سایر روشها، برای استخراج ماتریس اعضای پایانی مرجع S_0 ، روش VCA انتخاب و پیاده سازی شد [۱۳]. نکته قابل تأمل دیگر در حل مساله بهینه سازی، وجود نرم ترکیبی در تابع اصلی است. با توجه به مراجع [۱۴] و [۱۵] عبارت نرم ترکیبی $L(2, 1)$ در معادله (۱۱) به نرم $L(1, 1)$ قابل تبدیل است. اکنون با توجه به شبه کد آرایه شده در الگوریتم (۱) حل مساله بهینه سازی معادله (۱۱) به صورت زیر (در صفحه) بعد قابل انجام است.

۳-۵- بهینه سازی نسبت به پارامتر S

برای تخمین المان های آرایه S نیاز است تابع هدف $H(S, \Psi, A)$ نسبت به متغیر S مینیمم شود. بنابراین می توان نوشت:

$$\begin{aligned} \hat{S} = & \arg \min_{S \geq 0} H(S, \Psi, A) \text{ w.r.t } S \\ \hat{S}_k = & \arg \min_{S_k} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\|x_k - S_k a_k\|_2^2 + \\ & \lambda_s \|S_k - (S_0 \square \Psi)_k\|_F^2) \end{aligned} \quad (12)$$

معادله (۱۲) نسبت به S_k دارای فرم بسته است. از این رو، با گرفتن مشتق از این معادله نسبت به S_k خواهیم داشت:

$$S_k \leftarrow (x_k a_k^T + \lambda_s (S_0 \square \Psi)_k) (a_k a_k^T + \lambda_s I_P)^{-1} \quad (13)$$

²⁵- Hyperspectral Image Unmixing

²⁶- Minimum Volume Simplex Analysis

²⁷- Vertex Component Analysis

²⁸- Nascimento and Dias

معادله (۱۶) معادله‌ای بازگشتی^{۳۰} است و n تعداد تکرار (بازگشت) است. با محاسبه مقادیر المان‌های مختلف آرایه Ψ از معادله (۱۶) و جایگذاری آن‌ها در الگوریتم^۱ و تکمیل فرایند همگرایی در حلقه، مقدار بهینه آرایه Ψ تخمین زده می‌شود.

راهنمایی: در شرایطی که در معادلات، ضرب ماتریسی شامل ضرب هادامارد و ضرب ماتریسی به صورت توام باشد، محاسبه مشتق متفاوت از مشتق‌گیری ماتریسی معمول است. این موضوع در زیر توضیح داده می‌شود:

اگر عبارت زیر را داشته باشیم، مطلوبست تعیین D

$$D = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \|\mathbf{A} \square \mathbf{X} - \mathbf{B}\|_F^2 = ?$$

$$\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n \times m}; \mathbf{X} = [x_{ij}]_{n \times m}; \mathbf{B} = [b_{ij}]_{n \times m};$$

$$\mathbf{C} = [a_{ij}x_{ij} - b_{ij}]_{n \times m} \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \sum_{i',j'} (a_{i',j'}x_{i',j'} - b_{i',j'})^2 =$$

$$\sum_{i',j'} 2a_{i',j'}(a_{i',j'}x_{i',j'} - b_{i',j'}) \Rightarrow D = 2\mathbf{A} \square (\mathbf{A} \square \mathbf{X} - \mathbf{B})$$

$$SO; \frac{d\|\mathbf{S}_k - (\mathbf{S}_0 \square \Psi_k)\|_F^2}{d\Psi_k} = -2\mathbf{S}_0 \square (\mathbf{S}_k - (\mathbf{S}_0 \square \Psi_k))$$

۵-۵- بهینه‌سازی نسبت به پارامتر $\mathbf{A}$

برای به دست آوردن ماتریس اباندنس باید تابع هدف مساله بهینه‌سازی، نسبت به پارامتر $\mathbf{A}$ کمینه شود. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\hat{\mathbf{A}} = \arg \min_{\mathbf{A} \geq 0} H(\mathbf{S}, \Psi, \mathbf{A}) w.r.t \rightarrow \mathbf{A}$$

$$\hat{\mathbf{A}} = \arg \min_{\mathbf{A} \geq 0} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\|\mathbf{X}_k - \mathbf{S}_k \mathbf{a}_k\|_F^2) + \mathbf{I}_R^+(\mathbf{A}) +$$

$$\lambda_A (\|\mathbf{H}_h(\mathbf{A})\|_{2,1} + \|\mathbf{H}_v(\mathbf{A})\|_{2,1}) + \mu^T (\mathbf{A}^T \mathbf{1}_p - \mathbf{1}_N)$$

این مساله به واسطه نرم $L_{2,1}$ نسبت به $\mathbf{A}$ مشتق‌پذیر نیست. همچنین نسبت به اعضای پایانی یا پیکسل‌ها نیز جداسدنی نیست [۲] و [۱۵]. روشی که در این گونه مسایل به کار می‌رود، به کارگیری روش ADMM^{۳۱} است. در این روش، یک مساله پیچیده که قابل حل و دارای فرم بسته نیست، به تعدادی مساله

با توجه به اینکه المان‌های امضاها طیفی مثبت هستند $(S_k \in R^{+(L \times P)})$ ، بنابراین، نتایج تخمین حاصل از معادله (۱۳) را به ازای $(k=1,2,\dots,N)$ با سطح آستانه صفر مقایسه کرده و المان‌های منفی را حذف می‌کنیم.

۵-۴- بهینه‌سازی نسبت به پارامتر Ψ

برای به دست آوردن المان‌های آرایه ضرایب Ψ ، باید تابع هدف نسبت به متغیر Ψ مینیمم شود. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\hat{\Psi} = \arg \min_{\Psi \geq 0} H(\mathbf{S}, \Psi, \mathbf{A}) w.r.t \rightarrow \Psi$$

$$\hat{\Psi}_k = \arg \min_{\Psi_k} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\lambda_s \|\mathbf{S}_k - (\mathbf{S}_0 \square \Psi_k)\|_F^2$$

$$+ \frac{\lambda_\Psi}{2} (\|\mathbf{H}_{\Psi_h}(\Psi_k)\|_F^2 + \|\mathbf{H}_{\Psi_v}(\Psi_k)\|_F^2)$$

$$\frac{d(H(\mathbf{S}, \Psi, \mathbf{A}))}{d(\Psi_k)} = -\lambda_s \mathbf{S}_0 \square (\mathbf{S}_k - (\mathbf{S}_0 \square \Psi_k)) +$$

$$\lambda_\Psi (\mathbf{H}_{\Psi_h}^T \mathbf{H}_{\Psi_h}(\Psi_k) + \mathbf{H}_{\Psi_v}^T \mathbf{H}_{\Psi_v}(\Psi_k)) = 0$$

$$\lambda_s \mathbf{S}_0 \square (\mathbf{S}_0 \square \Psi_k) = -\lambda_\Psi (\mathbf{H}_{\Psi_h}^T \mathbf{H}_{\Psi_h}(\Psi_k) +$$

$$\mathbf{H}_{\Psi_v}^T \mathbf{H}_{\Psi_v}(\Psi_k)) + \lambda_s \mathbf{S}_0 \square \mathbf{S}_k \equiv \mathbf{U}^n$$

$$(\mathbf{S} \square \Psi)_{k(i,j)}^{(n+1)} = \frac{U_{i,j}^n}{\lambda_s (S_0)_{i,j}}; k=1,2,\dots,N$$

$$(\hat{\Psi}_k)^{(n+1)}_{i,j} = \frac{U_{i,j}^n}{\lambda_s (S_0)_{i,j}^2}; k=1,2,\dots,N$$

الگوریتم ۱: شبه کد اعمالی به منظور یافتن نقطه مینیمم مساله بهینه‌سازی با تابع هدف $H(\mathbf{S}, \Psi, \mathbf{A})$	
ورودی: ماتریس مشاهدات ($\mathbf{X}$) و ماتریس اعضای پایانی مرجع ($\mathbf{S}_0$)	
خروجی: $(\hat{\mathbf{S}}, \hat{\Psi}, \hat{\mathbf{A}})$	
مقداردهی	$\mathbf{S}; S_{i,j,k} > 0$
مقداردهی اولیه:	ASC رعایت محدودیت $\mathbf{A}; a_{i,j} > 0$
	با فرض $0 \leq \Psi_{i,j,k} \leq 1.35$
تکرار در حلقه تا زمانی که همگرایی به وجود آید	
$\hat{\mathbf{S}} = \arg \min_{\mathbf{S} \geq 0} H(\mathbf{S}, \Psi, \mathbf{A}) w.r.t \rightarrow \mathbf{S}$	
$\hat{\Psi} = \arg \min_{\Psi \geq 0} H(\mathbf{S}, \Psi, \mathbf{A}) w.r.t \rightarrow \Psi$	
$\hat{\mathbf{A}} = \arg \min_{\mathbf{A} \geq 0} H(\mathbf{S}, \Psi, \mathbf{A}) w.r.t \rightarrow \mathbf{A}$	
پایان تخمین متغیرها در صورت همگرایی	

³⁰- Iterative

³¹- Alternating Direction Method of Multiplier (ADMM)

²⁹- With Respect To (w.r.t)

$$\begin{aligned} \Lambda\{\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}\} &= \arg \min_{\mathbf{u}, \mathbf{v}} g(\mathbf{v}); s.t \rightarrow \Lambda \mathbf{v} + \Gamma \mathbf{u} = 0; \\ g(\mathbf{v}) &= \frac{1}{2} \|\mathbf{X} - \mathbf{b}_1\|_2^2 + \lambda_A (\|\text{vect}(\mathbf{b}_2)^{-1}\|_{2,1} + \\ &\|\text{vect}(\mathbf{b}_3)^{-1}\|_{2,1}) + \mathbf{I}_R^+(\mathbf{b}_4) + \boldsymbol{\mu}^T (\mathbf{K} \mathbf{a} - \mathbf{I}_N) \\ \text{def : } \mathbf{u} &= \text{vect}(\mathbf{A}); \mathbf{v} = [\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \mathbf{b}_3 \quad \mathbf{b}_4 \quad \mathbf{b}_5]^T; \\ \Gamma &= \begin{bmatrix} \Sigma^T & \mathbf{I}_{P \times N} & 0 & 0 & \mathbf{I}_{P \times N} \end{bmatrix} \\ \Lambda &= \begin{bmatrix} -\mathbf{I}_{L \times N} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{I}_{P \times N} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{H}_h & -\mathbf{I}_{P \times N} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{H}_v & 0 & -\mathbf{I}_{P \times N} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{I}_{P \times N} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (20)$$

منظور از $\text{vect}(\mathbf{A})$ فرم برداری ماتریس $\mathbf{A}$ است. یعنی تمام ستون‌های $\mathbf{A}$ به صورت پیوسته پشت سر هم نمایش داده شود. $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{L \times P \times N}$ ماتریس با ابعاد $N \times P \times N$ از اپراتورهای خطی است. و $\mathbf{I}(\cdot)$ ماتریس واحد است که ابعادش در اندیس آن آمده است. برای یافتن ماتریس $\mathbf{A}$ ، دو نمایش ماتریسی و برداری قابل بیان است و هر دو دارای جواب یکسانی هستند و در حین حل مساله، برای ساده‌تر شدن هر کدام قابل تبدیل و به کارگیری هستند. به کارگیری روش ADMM این امکان را فراهم می‌کند که یک مساله بهینه‌سازی مقید را به وسیله اپراتور لاگرانژین افزوده^{۳۷} به یک مساله بهینه‌سازی نامقید^{۳۸} تبدیل کرده و هر یک از پارامترها را جداگانه محاسبه کنیم. بنابراین، لاگرانژین افزوده معادله (۲۰) به منظور تبدیل به یک مساله بهینه‌سازی نامقید به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} L(\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{v}, \mathbf{d}) &= f(\mathbf{u}) + g(\mathbf{v}) + \frac{\rho}{2} (\|\Gamma \mathbf{u} + \Lambda \mathbf{v} - \mathbf{d}\|_2^2 - \|\mathbf{d}\|_2^2) \\ L(\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{v}, \mathbf{d}) &= \frac{1}{2} (\|\mathbf{x} - \mathbf{b}_1\|_2^2 + \lambda_A (\|\text{vect}^{-1}(\mathbf{b}_2)\|_{2,1} + \|\text{vect}^{-1}(\mathbf{b}_3)\|_{2,1}) \\ &+ \mathbf{I}_R^{+(P \times N)}(\mathbf{b}_4) + \boldsymbol{\mu}^T (\mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{I}_N) + \frac{\rho}{2} \|\sum \mathbf{u} - \mathbf{b}_1 - \mathbf{d}_1\|_2^2 \\ &+ \frac{\rho}{2} \|\mathbf{u} - \mathbf{b}_2 - \mathbf{d}_2\|_2^2 + \frac{\rho}{2} \|\mathbf{H}_h \mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_3 - \mathbf{d}_3\|_2^2 + \\ &\frac{\rho}{2} \|\mathbf{H}_v \mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_4 - \mathbf{d}_4\|_2^2 + \frac{\rho}{2} \|\mathbf{u} - \mathbf{b}_5 - \mathbf{d}_5\|_2^2 + \frac{\rho}{2} \|\mathbf{d}\|_2^2 \end{aligned} \quad (21)$$

ساده‌تر تبدیل می‌شود که قابل حل هستند [۱۵]. آن‌گاه هر یک از این مسایل جداگانه حل می‌شوند. پاسخ هر یک از این مسایل ارتباط با یکدیگر به پاسخ مساله بعدی منجر می‌شود. پاسخ مجموعه این زیرمساله‌ها در یک حلقه زنجیروار و بازگشتی به پاسخ مساله پیچیده اولیه منجر می‌شود. همچنین بمانند روشی که در مرجع [۱۶] ارایه شده است، برای ساده‌تر شدن راه‌حل، امکان جابه‌جایی از حوزه زمان به حوزه فرکانس در فرایند حل تعدادی از مسایل وجود دارد. در این مساله ابتدا لاگرانژین افزوده^{۳۲} معادله (۱۸) تعریف می‌شود و در آن ده پارامتر جدید شامل پنج پارامتر ضرب کننده‌ی لاگرانژین^{۳۳} و پنج پارامتر کمکی^{۳۴} تعریف می‌شود. حل مجموعه این ده مساله (پارامتر) به روش زیر صورت می‌گیرد و نهایتاً به یافتن پارامتر اولیه $\mathbf{A}$ منجر می‌شود.

۶-۵- فرمول‌بندی مساله

با تغییر پارامترهای معادله (۱۸) و تبدیل آن به پارامترهای لاگرانژین افزوده و با حفظ محدودیت‌های ASC و ANC مساله فوق به یک مساله FCLSU^{۳۵} تبدیل می‌شود. این مساله را عیناً به روشی که در مرجع [۱۸] بیان شده است (حل مساله ADMM) مرحله به مرحله تبدیل و حل می‌کنیم. در مرحله اول پارامتر $\mathbf{A}$ به صورت زیر به پارامترهای کمکی $\mathbf{B}_1$ تا $\mathbf{B}_5$ تبدیل می‌شود. بنابراین معادله (۱۸) به صورت زیر بر اساس پارامترهای جدید کمکی تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}} &= \arg \min \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\|\mathbf{X}_k - \mathbf{b}_{1k}\|_2^2) + \\ &\lambda_A (\|\mathbf{B}_3\|_{2,1} + \|\mathbf{B}_4\|_{2,1}) + \mathbf{I}_R^+(\mathbf{B}_5) + \\ &\boldsymbol{\mu}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{1}_P - \mathbf{1}_N) s.t : \mathbf{B}_2 = \mathbf{A}; \\ &\mathbf{B}_3 = \mathbf{H}_h(\mathbf{B}_2); \mathbf{B}_4 = \mathbf{H}_v(\mathbf{B}_2) \\ &\mathbf{B}_5 = \mathbf{A}; \mathbf{b}_{ik} = k' \text{th} - \text{column} \mathbf{B}_i \end{aligned} \quad (19)$$

به صورت زیر به یک مساله بهینه‌سازی مقید^{۳۶} قابل تعریف است:

32- Augmented Lagrangian

33- Lagrangian Multipliers

34- Auxiliary Parameter

35- Fully Constrained Linear Spectral Unmixing

36 - Constrained Optimization Problem

39- Augmented Lagrangian

38- Non Constrained Optimization Problem

همین داده‌ها اما به روش ELMM مورد مقایسه قرار گرفت. نتایج حاصل از این بررسی در بخش ۶-۲ ارایه شده است.

۶-۱- شبیه‌سازی و آنالیز با داده‌های ابرطیفی مصنوعی

برای تولید داده‌های مصنوعی دو پارامتر به عنوان ورودی برای انجام آزمایش مورد نیاز است: ماتریس مشاهدات (X) و ماتریس اعضای پایانی مرجع (S_0). پنج امضای طیفی استاندارد با همکاری دانشگاه تهران از آزمایشگاه سنجش از دور آن دانشگاه دریافت شد و از آن داده‌ها به عنوان اعضای پایانی مرجع استفاده شد. این داده‌ها در ۱۶۲ باند فرکانسی مختلف ($L=162$) در جدول (۱) قابل مشاهده است. پارامتر مورد نیاز بعدی آرایه ضرایب $\Psi(L \times P \times N)$ است. بر اساس تجربه نتایج شبیه‌سازی با داده‌های واقعی و همچنین با توجه به مرجع [۲]، المان‌های این آرایه را به صورت توزیع گوسین بین $0/4$ تا $1/35$ تولید می‌کنیم. هر صفحه از این آرایه به ازای هر پیکسل k با المان‌های ماتریس S_0 به صورت جزء به جزء ضرب می‌شود تا اعضای ماتریس S_k به ازای هر k برای $(k=1,2,\dots,N)$ تولید شود. در این آزمایش پنج شکل هندسی مختلف به عنوان پنج ماده متفاوت تولید شد (مطابق شکل ۲) و به هر یک از این اشکال یکی از این امضاهای طیفی موجود در جدول (۱) نسبت داده شد.

جدول (۱): اعضای پایانی مرجع ($S_{0(L \times P)}$) به کار گرفته شده در آزمایش با داده‌های طیفی مصنوعی

Reference Endmembers	S_{01}	S_{02}	S_{03}	S_{04}	S_{05}
L_1	0.0130	0.0300	0.2650	0.0950	0.2170
L_2	0.0190	0.0310	0.2710	0.0960	0.2220
L_3	0.0250	0.0370	0.2680	0.0990	0.2250
$\vdots$					
L_{161}	0.0570	0.0850	0.1520	0.1800	0.4560
L_{162}	0.0400	0.0610	0.1360	0.1680	0.4780

ماتریس مشاهدات مطابق معادله (۸) و (۹) و معادل با $L \times (m \times n)$ با ابعاد $162 \times (80 \times 80)$ در حوزه زمان ساخته شد. با تولید ماتریس مشاهدات و وجود ماتریس اعضای پایانی مرجع (S_0)، در ابتدا شبیه‌سازی بر اساس مدل پیشنهادی با این داده‌ها انجام شد و مقادیر $\hat{S}$ و $\hat{A}$ و $\hat{\Psi}$ با مقادیر اولیه آن‌ها مقایسه شد. برای بررسی دقیق‌تر، معیارهایی کمی تعریف شده‌اند که مقادیر تخمین زده شده بر اساس این معیارها مورد بررسی قرار گرفت. این معیارها

در این معادله ضرب کننده‌های لاگرانژین به فرم برداری (یا D به فرم ماتریسی) و ρ ضریب d وزن دهنده جملات لاگرانژین افزوده است. حل ده پارامتر تعریف شده جدید (δ پارامتر b_i و δ پارامتر d_i) طبق الگوریتم ۲ بیان شده به صورت شبه کد زیر محاسبه می‌شود.

الگوریتم ۲: استخراج پارامترهای ADMM و دستیابی به ماتریس A	
داده‌های ورودی:	$\hat{S}, X$
خروجی‌ها:	$\hat{A} = \text{vect}^{-1}(u)$
مقداردهی اولیه پارامترهای:	u, v, d, μ, ρ
While ADMM criteria not satisfied; do:	
$\hat{u} = \arg \min L(u, \mu, v, d,) w.r.t \rightarrow u$	
$\hat{v} = \arg \min L(u, \mu, v, d,) w.r.t \rightarrow v$	
$\hat{d} \leftarrow d - \Gamma u - \Delta v$	
End	

استخراج مقادیر ماتریس A منوط به حل معادله پیچیده بهینه‌سازی (۲۱) است. راه حل به کار گرفته شده برای حل معادله (۱۸)، مشابه روش به کار رفته در مرجع [۲] و مرجع [۱۸] است و از حیث روش حل، فاقد نوآوری است و صرفاً روشی برای حل یک مساله پیچیده است که به صورت معمول قابل حل نیست و با این راهکار تبدیل و قابل حل می‌شود. علت بیان این بخش از موضوع پیچیدگی معادله موجود بوده و هدف نویسنده، راهنمایی خواننده مقاله و در مسیر قرار دادن ایشان برای درک بهتر و سریع‌تر روش حل این نوع مساله بوده است.

۶-۲- شبیه‌سازی با داده‌های مصنوعی و حقیقی

برای بررسی کارایی مدل مطرح شده، دو دسته داده حقیقی و مصنوعی به کار گرفته شد و شبیه‌سازی مدل پیشنهادی (IELMM) و همچنین مدل ترکیب خطی توسعه‌یافته (ELMM) برای این دو دسته داده انجام شد و نتایج خروجی برای هر دو روش مورد بررسی و آنالیز قرار گرفته است. در ابتدا داده‌های مصنوعی ابرطیفی^{۳۹} تولید شد و هر دو مدل با این دسته داده مورد آزمایش قرار گرفتند. نتایج و آنالیز این آزمایش در بخش ۶-۱ به صورت نتایج و مقایسه کمی و همچنین کیفی ارایه شده است. در آزمایش دوم که با داده‌های حقیقی انجام شده است، مدل پیشنهادی با این داده‌ها شبیه‌سازی شد و نتایج به دست آمده، با نتایج شبیه‌سازی با

عمل انجام می شود و بنابراین در سیکل های بعدی خروجی های بهتری را نتیجه می دهد.

۶-۲- شبیه سازی با داده های حقیقی

برای بررسی دقیق تر موضوع ارایه شده، دو آزمایش انجام شد. در هر دو آزمایش برای انجام شبیه سازی با داده های حقیقی، از داده های ابرطیفی استاندارد پاپویا^{۴۰} که نشان دهنده مجتمع دانشگاهی پاپویا در ایتالیاست استفاده شد. قابل ذکر است این مجموعه تصاویر یک نمونه از داده های استاندارد ابرطیفی است که به طور معمول برای انجام آزمایش ها به کار می رود. تصویر کامل کمپ دانشگاهی پاپویا در قالب RGB در سطر اول از شکل (۵) (ناحیه چپ تصویر) قابل رویت است. در هر یک از شبیه سازی ها، یک مکعب از یک ناحیه دلخواه از این دسته داده انتخاب شد و روش پیشنهادی (IELMM) و روش ELMM روی آن دسته داده ی یکسان، پیاده سازی شد.

۱-۲-۶- شبیه سازی اول با داده های حقیقی

داده های ابرطیفی پاپویا دارای ابعاد $103 \times (610 \times 340)$ به عنوان $L \times (m \times n)$ است در شرایطی که $m \times n \times N$. در آزمایش اول یک مکعب دلخواه کوچک با ابعاد $24 \times (90 \times 110)$ از تصویر اصلی به عنوان ماتریس مشاهدات X انتخاب شده است. ناحیه شمال شرقی تصویر از تصویر اصلی در محدوده $(80:103; 20:110; 120:230)$. تعداد اعضای پایانی به طور اختیاری $P=4$ در نظر گرفته شده است. قابل توضیح است که الگوریتم هایی برای استخراج تعداد اعضای پایانی وجود دارد، از جمله آنها می توان به الگوریتم هایزم^{۴۱} اشاره کرد [۱۷]. اما بحث استخراج تعداد اعضای پایانی در حوزه تعریف این پروژه نیست و به آن پرداخته نمی شود. داده دیگری که برای انجام شبیه سازی نیاز است، ماتریس اعضای پایانی مرجع S_0 است. با توجه به استدلال بیان شده در بخش ۵-۲، الگوریتم VCA برای استخراج ماتریس S_0 پیاده سازی شد. بر اساس شبه کد ارایه شده در الگوریتم (۱)، شبیه سازی با داده های حقیقی انجام گرفت و نتایج خروجی شبیه سازی برای تخمین اباندنس ($\hat{A}$) حاصل از

عبارتند از خطای جذر میانگین مربعات برای هر یک از سه پارامتر مطلوب که به صورت زیر تعریف می شوند [۲]:

$$A_{RMSE} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sqrt{\frac{1}{P} \sum_{p=1}^P (a_{pk \text{ true}} - \hat{a}_{pk})^2} \quad (22)$$

$$\Psi_{RMSE} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sqrt{\frac{1}{LP} \|\Psi_{k \text{ true}} - \hat{\Psi}_k\|_F^2} \quad (23)$$

$$S_{RMSE} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sqrt{\frac{1}{LP} \|S_{k \text{ true}} - \hat{S}_k\|_F^2} \quad (24)$$

سپس همین آزمایش بر اساس مدل موجود قبل (ELMM) با داده های فوق به انجام رسید و مقادیر به دست آمده با مقادیر اولیه بر اساس معیارهای فوق مورد مقایسه و بررسی قرار گرفت. نتایج حاصل از این مقایسه در جدول (۲) ارایه شده است. همچنین نتایج حاصل از شبیه سازی آزمایش انجام شده برای پارامتر $\hat{A}$ که معیاری قابل رویت و مقایسه است، در شکل (۲) آورده شده است. ستون اول از شکل (۲) (از سمت چپ)، تصاویر اباندنس تولید شده به صورت سنتز برای پنج ماده خالص با امضای طیفی متفاوت، به ترتیب از بالا به پایین را نشان می دهد. ستون دوم از شکل (۲)، اباندنس تخمین زده شده به روش ELMM برای این امضاهای طیفی را نشان می دهد و در ستون سوم تصاویر اباندنس تخمین زده شده برای مدل پیشنهادی به صورت نظیر به نظیر قابل رویت است. همچنان که در تصویر ملاحظه می شود، مدل ELMM نسبت به IELMM دارای نتایج ضعیف تری است (در تصاویر EM1, EM3, EM4). خصوصاً در شناسایی نواحی مرزها و کیفیت کلی تصویر، این تفاوت قابل ملاحظه است. با مشاهده جدول (۲) دقت بهتر در تخمین پارامتر A در روش IELMM واضح است. در خصوص پارامتر Ψ با توجه به اینکه تاکنون چنین آرایه ای تعریف نشده بوده است، مقایسه امکان پذیر نیست. در خصوص پارامتر S ، همچنان که ملاحظه می شود، روش پیشنهادی دقت بهتری در تخمین پارامتر مورد نظر نسبت به روش ELMM داراست.

نکته ای که می توان به آن اشاره کرد آن که، به دلیل آن که مدل ریاضی پیشنهادی مدل جامع تری نسبت به قبل است، از این رو، فرایند تخمین در سیکل های اولیه حلقه تخمین، با دقت بهتری در

⁴⁰ - Pavia Hyperspectral Images Data

⁴¹ - Hysime Algorithm

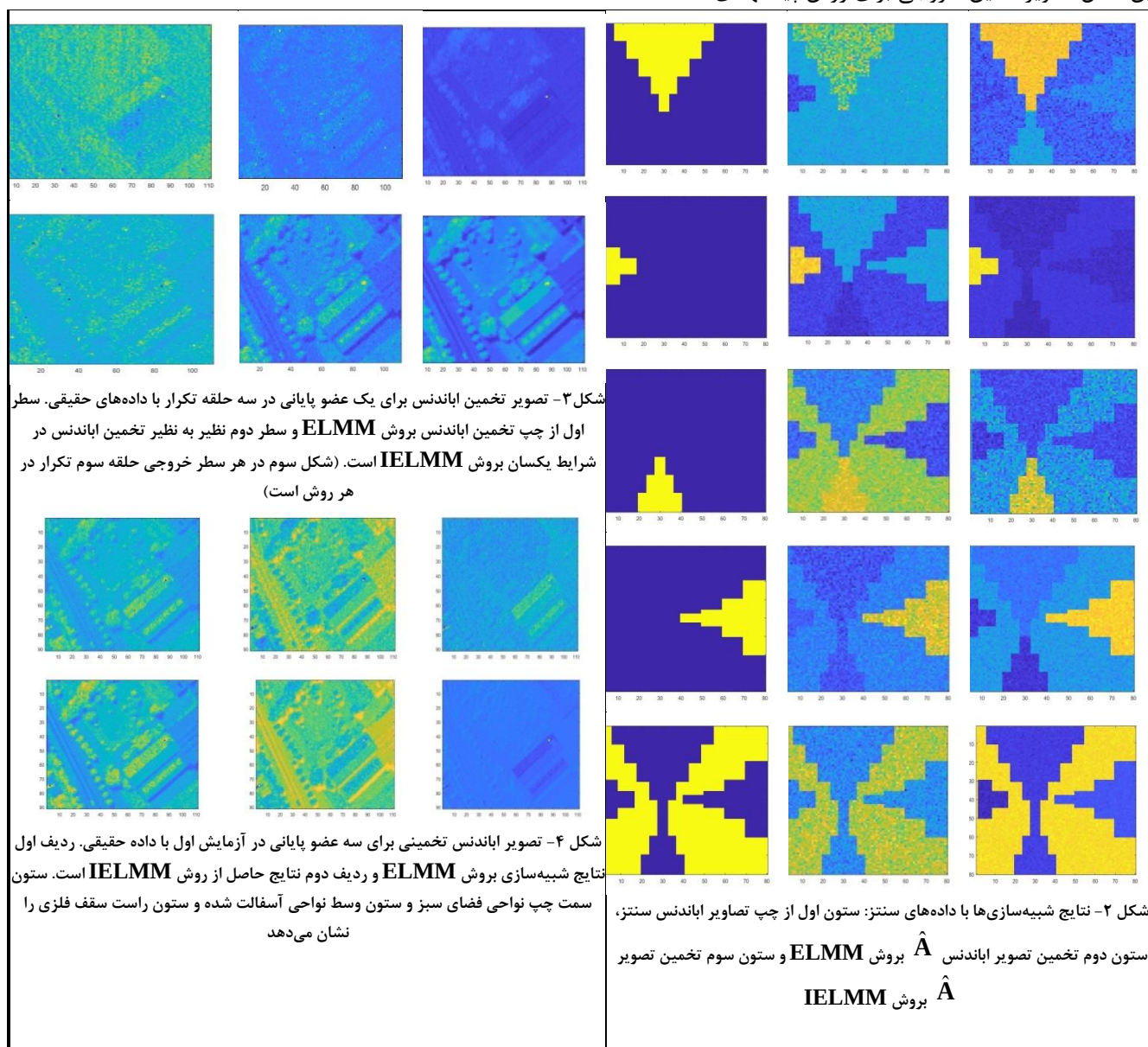
همچنان‌که در تصویر دیده می‌شود روش پیشنهادی در تکرار مرحله دوم پاسخ قابل قبولی دارد به نحوی که در روش ELMM این پاسخ در مرحله ۳ تکرار نیز دیده نمی‌شود. سرعت در رسیدن به پاسخ در روش پیشنهادی در تکرار مراتب پایین در تمامی مراحل شبیه‌سازی دیده و سنجیده شد. همچنین در این روش در سومین حلقه تکرار، پاسخ همگرا می‌شود که این موضوع در روش ELMM در بهترین شرایط انجام شبیه‌سازی، در دو تکرار بالاتر به وقوع می‌پیوندد. در ادامه آزمایش، پاسخ نهایی شبیه‌سازی برای سه عضو پایانی دیگر در شکل (۴) قابل ملاحظه است. سطر اول از شکل ۴ تصویر حاصل از تخمین اباندنس برای روش ELMM

روش پیشنهادی IELMM و روش ELMM برای یک عضو پایانی (EM2) از جهت مقایسه همگرایی هر روش در انتهای هر یک از حلقه‌های اول تا سوم تکرار آورده شده است.

جدول (۲): آنالیز کمی خطای پارامترهای تخمین

Algorithm	ELMM	IELMM
A_{rmse}	0.0197	0.0034
Ψ_{rmse}	-----	0.0887
S_{rmse}	0.0453	0.0344

سطر اول از شکل (۳) تصویر اباندنس تخمین زده شده بروش ELMM برای یک عضو پایانی در شرایط یکسان است. سطر دوم از این شکل تصویر همین خروجی برای روش پیشنهادی است.



پایانی در شکل (۶) ارایه شده است. این موضوع قابل ذکر است که در مقاله‌ی درومتر و همکاران (۲۰۱۶)، که یکی از مراجع اصلی این تحقیق است [۲]، به دلیل آنکه کار ایشان با دیگر الگوریتم‌های قبل از ایشان مقایسه شده بود (مانند الگوریتم‌های CLSU، S-PLMM، FCLSU و مقایسه و برتری کار ایشان احراز شده بود)، از این رو، ما طرح پیشنهادی خود را با الگوریتم پیشنهادی ایشان مقایسه نموده‌ایم و عیناً نتایج حاصل از شبیه‌سازی‌های انجام شده برای دو روش با یک ورودی یکسان و استاندارد را به منظور مقایسه آورده‌ایم. نتایج حاصل از شبیه‌سازی‌ها در شکل (۶) به صورت زیر ارایه می‌شود:

همچنان‌که در ستون اول از شکل (۶) (از چپ) دیده می‌شود، تصویر اباندنس اعضای پایانی شامل بخش‌های نواحی سایه، نواحی علف‌زار و صفحات فلزی که به روش ELMM تخمین زده شده، دیده می‌شود. این نواحی در تصویر به رنگ زرد کم رنگ مشخص شده‌اند. در ستون دوم از این شکل، توزیع همین اعضا در نواحی مشخص شده به رنگ زرد به روش پیشنهادی IELMM قابل مشاهده است. با تامل در تصاویر، و مقایسه آنها با سطر سوم از شکل (۵) ملاحظه می‌شود که تخمین به دست آمده به روش پیشنهادی IELMM، مشابهت بیشتری به توزیع واقعی مواد مختلف در تصویر واقعی دارد و از دقت بالاتری در تخمین هر جز برخوردار است.

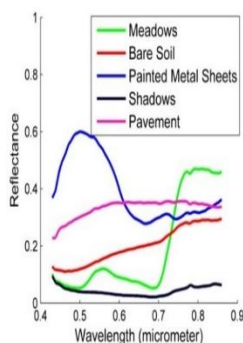
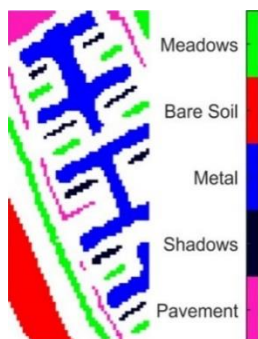
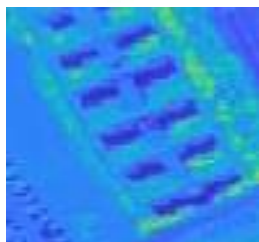
۷- نتیجه‌گیری

در این مقاله، روشی جدید برای حل مساله جداسازی برای داده‌های ابرطیفی ارایه شده است. در پیشنهاد مطرح شده تخمین خروجی‌های مساله جداسازی (آرایه اعضای پایانی S) و ماتریس اباندنس A به شکلی دقیق‌تر و سریع‌تر از روش ELMM به دست می‌آید، علاوه بر آنکه آرایه‌ای جدید برای بیان کمی مساله تغییرات اعضای پایانی معرفی می‌شود. در این روش، با ذهنیتی که از مدل ELMM برگرفته شده، ساختاری جدید ارایه شده که مساله تغییرات اعضای پایانی به شکلی کامل‌تر و دقیق‌تر در نظر گرفته شود. در مدل ارایه شده، آرایه‌ای سه بعدی به نام Ψ معرفی شده است که مدل کننده‌ی هر نوع تغییر (در سه بعد) در المان‌های اعضای پایانی باشد (در مدل قبل تغییرات تنها در جهت اعضای پایانی P امکان‌پذیر بود). در مرحله بعد المان‌های این آرایه را با مشخصه‌های طیفی اعضای پایانی به صورت عضو به عضو و نظیر به نظیر با بهره‌گیری از ضرب

برای سه عضو پایانی شامل ناحیه سبز، نواحی آسفالت و سقف فلزی نشان داده شده است. سطر دوم همین شکل، تصویر متناظر حاصل از تخمین اباندنس برای روش پیشنهادی IELMM است. نواحی مشخص شده در تصاویر با رنگ زرد روشن، جداکننده محدوده مورد نظر از جمله فضای سبز، سطوح آسفالت شده و ناحیه سقف فلزی در هر تصویر است. ملاحظه می‌شود که تصاویر سطر دوم دارای وضوح و دقت بیشتر در تفکیک نواحی مورد نظر است. در انجام شبیه‌سازی، اهمیت پارامترهای تنظیم کننده λ_A و λ_s و λ_w در سرعت دستیابی به جواب نهایی محسوس بود. مقادیر مناسب این سه پارامتر با توجه به جدول ارایه شده در مرجع [۱۸] انتخاب شد. پارامترهای تنظیم کننده در رسیدن به جواب و سرعت همگرایی پاسخ نهایی، موثر و تاثیرگذار بودند.

۲-۲-۶- شبیه‌سازی دوم با داده‌های حقیقی

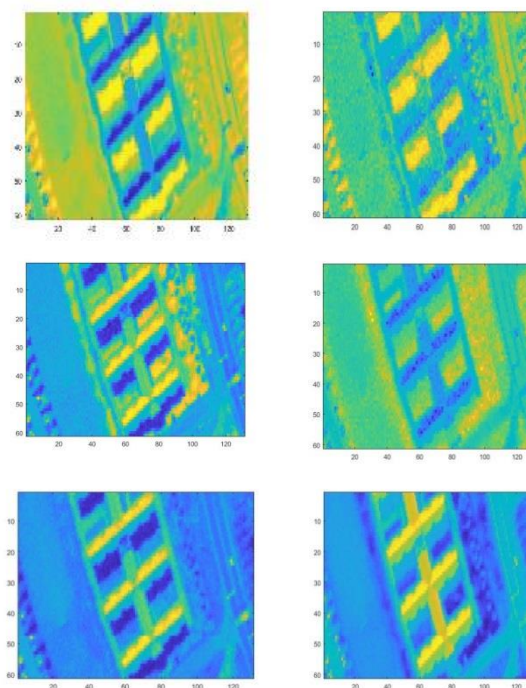
برای انجام آزمایش دوم از داده‌های ابرطیفی پاولیا اما از یک ناحیه انتخابی دیگر استفاده شد. یک مکعب با ابعاد $94 \times (61 \times 131)$ از تصویر کلی که دارای ابعاد $103 \times (61 \times 340)$ که معادل $L \times (m \times n)$ در حوزه زمان است، به عنوان بردار مشاهدات X در محدوده $10: 103; 200: 260; 90: 220$ انتخاب شد. (بخش میانی از ناحیه فوقانی تصویر). این مکعب تصویری، همان ماتریس مشاهدات ورودی الگوریتم است. این ورودی سه بعدی را به ماتریسی دو بعدی با ابعاد $L \times N$ که در آن $N = n \times m$ است تبدیل می‌کنیم. یعنی هر لایه از این آرایه ورودی به یک سطر از ماتریس مشاهدات تبدیل می‌شود. در این آزمایش تعداد اعضای پایانی برابر با $P=3$ انتخاب شد. برای درک بهتر موضوع، در سطر اول از شکل (۵) تصویر کامل کمپ دانشگاهی پاولیا در قالب RGB و همچنین تقریبی از ناحیه انتخاب شده آورده شده است. در سطر دوم شکل (۵)، تصویر سیاه و سفید ناحیه تقریبی انتخاب شده و تصویر ابرطیفی آن محدوده در لایه ۸۶ ام طیفی قابل مشاهده است. همچنین توزیع محیطی اعضای پایانی و نمودار انعکاس طیفی برای ۵ عضو پایانی بر حسب طول موج در سطر سوم همین شکل قابل رویت است. در این آزمایش نیز، الگوریتم پیشنهادی IELMM و همچنین الگوریتم ELMM بر روی این دسته داده شبیه‌سازی شد و نتایج حاصل از این آزمایش به عنوان تخمین اباندنس اعضای



شکل (۵): ستراول تصویر کامل کمپ دانشگاهی دانشگاه پاویا و ناحیه انتخاب شده برای شبیه‌سازی. سطر دوم تصویر سیاه و سفید تقریبی از ناحیه منتخب و در سمت راست آن تصویر ابرطیفی یک لایه (L=86) از محدوده تقریبی است. سطر سوم، توزیع محیطی اعضای پایانی و نمودار انعکاس‌های طیفی برای پنج عضو پایانی دیده است.

هادامارد به هم متصل کرده‌ایم. با این کار ضمن ایجاد آرایه S امکان وجود تغییرات در ساختار آرایه در مدل ریاضی لحاظ شده است، و از طرفی ساختار اولیه خطی بودن و بهره‌گیری از مزایای LMM نیز حفظ شده است. بدین ترتیب، تابع هدف مساله بهینه‌سازی به شکلی قابل انعطاف و دینامیک آرایه می‌شود که حل مساله جداسازی از این تابع به معادلات دیگری ختم می‌شود. این معادلات تخمین دقیق‌تری از پارامترهای مورد نظر $(\hat{S}, \hat{A}, \hat{\Psi})$ در مساله جداسازی ابرطیفی آرایه می‌دهند. تخمین دقیق‌تر در حلقه‌های اول و دوم تکرار در الگوریتم باعث رسیدن به جواب نهایی در تکرارهای مرتبه پایین می‌شود. همچنین با این راهکار، امکان بررسی کمی تغییرات اعضای پایانی فراهم شده است. این تغییرات برای هر پیکسل در هر لایه و برای هر عضو پایانی در آرایه Ψ قابل استخراج شده است. نتایج شبیه‌سازی با داده‌های مصنوعی و حقیقی کارایی مدل مطرح شده در این مقاله را در موضوع جداسازی ابرطیفی تایید می‌کند. در ضمن انجام شبیه‌سازی، به نتیجه‌ای عملی رسیدیم که می‌تواند از کل موضوع مهم‌تر باشد و آن اینکه، در صورتی که مدل ریاضی آرایه شده برای حل مساله جداسازی بهتر و بیشتر با فیزیک ناحیه مورد نظر تطبیق داشته باشد، نتایج حاصل به مراتب بهتر خواهد بود. این موضوع به ویژه در مباحثی چون رهگیری اهداف که مساله رسیدن به پاسخ در زمان محدود حیاتی است، می‌تواند بسیار مفید باشد. بنابراین، در مسایلی که به‌نوعی با تئوری تخمین مواجهند، دقت در طراحی تابع هدف مساله بهینه‌سازی و تطبیق هر چه بیشتر با شرایط و دینامیک موضوع، نتیجه تخمین را دقیق‌تر و سریع‌تر خواهد کرد.

- [4] G. Lu and B. Fei, "Medical hyperspectral imaging: A review," *J. Biomed. Opt.*, vol. 19, no. 1, Art. no. 010901, 2014.
- [5] G. A. Shaw and H. K. Burke, "Spectral imaging for remote sensing," *Lincoln Lab. J.*, vol. 14, no. 1, pp. 3–28, 2003.
- [6] N. Keshava and J. F. Mustard, "Spectral unmixing," *IEEE Signal Process. Mag.*, vol. 19, no. 1, pp. 44–57, 2002.
- [7] L. Drumetz, J. Chanussot, C. Jutten, W.-K. Ma, and A. Iwasaki, "Spectral variability aware blind hyperspectral image unmixing based on convex geometry," *IEEE Trans. Image Process.*, vol. 29, pp. 4568–4582, 2020.
- [8] J. M. Bioucas-Dias, A. Plaza, N. Dobigeon, M. Parente, Q. Du, P. Gader, and J. Chanussot, "Hyperspectral unmixing overview: Geometrical, statistical, and sparse regression-based approaches," *IEEE J. Sel. Top. Appl. Earth Obs. Remote Sens.*, vol. 5, no. 2, pp. 354–379, 2012.
- [9] N. Dobigeon, Y. Altmann, N. Brun, and S. Moussaoui, "Linear and nonlinear unmixing in hyperspectral imaging," in *Data Handling in Science and Technology*, vol. 30. Amsterdam, The Netherlands: Elsevier, 2016, pp. 185–224.
- [10] A. Zare and K. C. Ho, "Endmember variability in hyperspectral analysis: Addressing spectral variability during spectral unmixing," *IEEE Signal Process. Mag.*, vol. 31, no. 1, pp. 95–104, 2014.
- [11] S. Henrot, J. Chanussot, and C. Jutten, "Dynamical spectral unmixing of multitemporal hyperspectral images," *IEEE Trans. Image Process.*, vol. 25, no. 7, pp. 3219–3232, 2016.
- [12] R. A. Borsoi, T. Imbiriba, J. C. M. Bermudez, C. Richard, J. Chanussot, L. Drumetz, J.-Y. Tourneret, A. Zare, and C. Jutten, "Spectral variability in hyperspectral data unmixing: A comprehensive review," *IEEE Geosci. Remote Sens. Mag.*, vol. 9, no. 4, pp. 223–270, 2021.
- [13] J. M. Nascimento and J. M. Bioucas-Dias, "Vertex component analysis: A fast algorithm to unmix hyperspectral data," *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.*, vol. 43, no. 4, pp. 898–910, 2005.
- [14] M. Kowalski, K. Siedenburg, and M. Dörfler, "Social sparsity! Neighborhood systems enrich structured shrinkage operators," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 61, no. 10, pp. 2498–2511, 2013.
- [15] S. Boyd, N. Parikh, E. Chu, B. Peleato, J. Eckstein, et al., "Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers," *Found. Trends Mach. Learn.*, vol. 3, no. 1, pp. 1–122, 2011.
- [16] M.-D. Iordache, J. M. Bioucas-Dias, and A. Plaza, "Total variation spatial regularization for sparse hyperspectral unmixing," *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.*, vol. 50, no. 11, pp. 4484–4502, 2012.



شکل (۶): تصاویر تخمین اباندنس حاصل از شبیه سازی به روش ELMM در ستون اول و در ستون دوم نتایج حاصل به روش پیشنهادی با داده های حقیقی است. سطر اول نواحی سایه (عضو پایانی اول)، سطر دوم نواحی علفزار (عضو پایانی دوم) و در سطر سوم نواحی صفحات فلزی (عضو پایانی سوم) مشخص شده است.

تعارض منافع

"هیچ گونه تعارض منافع توسط نویسندگان بیان نشده است."

مراجع

- [1] J. M. Bioucas-Dias, A. Plaza, G. Camps-Valls, P. Scheunders, N. M. Nasrabadi, and J. Chanussot, "Hyperspectral remote sensing data analysis and future challenges," *IEEE Geosci. Remote Sens. Mag.*, vol. 1, no. 2, pp. 6–36, 2013.
- [2] L. Drumetz, M.-A. Veganzones, S. Henrot, R. Phlypo, J. Chanussot, and C. Jutten, "Blind hyperspectral unmixing using an extended linear mixing model to address spectral variability," *IEEE Trans. Image Process.*, vol. 25, no. 8, pp. 3890–3905, 2016.
- [3] D. Manolakis and G. Shaw, "Detection algorithms for hyperspectral imaging applications," *IEEE Signal Process. Mag.*, vol. 19, no. 1, pp. 29–43, 2002.

- [18] I. Regularization, “Blind hyperspectral unmixing using an extended linear mixing model to address spectral variability,” Supplementary material. *IEEE Trans. Image Process.*, vol. 25, no. 8, pp. 3890–3905, 2016.
- [17] J. M. Bioucas-Dias and J. M. Nascimento, “Hyperspectral subspace identification,” *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.*, vol. 46, no. 8, pp. 2435–2445, 2008.