



Attitude Control of Satellites Equipped with Three Reaction Wheels Using an H_2/H_∞ Switching Model Predictive Control Scheme Over a Wide Range of Operating Points

Taleb Abdollahi^{1*}

¹ *Assistant Prof., Iranian Space Research Center, Tehran, Iran
Email: t.abdollahi@isrc.ac.ir

Available in:
Journal.isrc.ac.ir

Journal of Space Science,
Technology & Applications
(Persian)

Vol. 5, No. 2, pp.: 54-74
2026

DOI:
[10.22034/jssta.2025.491857.1218](https://doi.org/10.22034/jssta.2025.491857.1218)

Article Info

Received: 2024-11-26
Accepted: 2025-04-21

Keywords

Satellite attitude control,
switched dynamics, Switched
model predictive control,
Persistent dwell time
switching signal, H_2/H_∞
performance.

How to Cite this article

T. Abdollahi, "Attitude Control of Satellites Equipped with Three Reaction Wheels Using an H_2/H_∞ Switching Model Predictive Control Scheme Over a Wide Range of Operating Points", *Journal of Space Science, Technology & Applications*, Vol. 5, No. 2, pp. 54-74, 2026.

Abstract

This paper presents a simultaneous attitude control scheme for satellites equipped with reaction wheel actuators, utilizing an H_2/H_∞ model predictive approach within a switched systems framework. The satellite's nonlinear attitude dynamics are decomposed into multiple linear sub-dynamics, each representing specific operating points. A switching law governs the activation of these sub-dynamics, enabling the system to leverage simpler linear models instead of directly addressing the complexity of the nonlinear dynamics. This approach also facilitates rapid attitude maneuvers, characteristic of switched systems. Control laws are designed for each sub-dynamic to ensure accurate tracking across a wide range of operating conditions, thereby enhancing both pointing accuracy and maneuvering speed. The proposed scheme addresses the H_2 optimization problem to guarantee closed-loop stability while satisfying satellite energy constraints. Additionally, it incorporates the H_∞ criterion to mitigate disturbances and improve robustness. The effectiveness of the proposed control strategy is validated through simulations on a representative satellite model, demonstrating its capability to achieve high-performance attitude control under varying operational scenarios.



دسترس پذیر در نشانی:

Journal.isrc.ac.ir

دوفصلنامه علوم، فناوری و

کاربردهای فضایی

سال پنجم، شماره ۲، صفحه ۷۴-۵۴

پاییز و زمستان ۱۴۰۴

DOI:

10.22034/jsssta.2025.491857.1218

چکیده

در مقاله حاضر، طرح همزمان کنترل وضعیت بر اساس رویکرد پیش‌بین مدل کلیدزنی H_2/H_∞ و سیگنال کلیدزنی برای ماهره‌های تجهیز شده با عملگرهای چرخ عکس‌العملی توسعه می‌یابد. در این طرح، ابتدا دینامیک وضعیت غیرخطی ماهره بر اساس نقاط کاری مختلف به چند زیردینامیک خطی که هر کدام توصیف‌کننده بخشی از رفتار کلی است شکسته می‌شود. سپس، یک قانون کلیدزنی تعریف می‌شود که زمان فعال بودن هر کدام از دینامیک‌ها را مشخص می‌کند. بنابراین، به جای پرداختن به یک دینامیک غیرخطی پیچیده، از چند زیردینامیک خطی ساده استفاده می‌شود. همچنین، به دلیل ماهیت سیستم‌های کلیدزنی، امکان مانورهای سریع قابل پوشش است. علاوه بر این، با تخصیص دادن یک قانون کنترلی برای هر زیردینامیک هم امکان ردیابی در یک محدوده وسیع نقاط کاری فراهم می‌شود و هم دقت و سرعت نشانه‌روی افزایش می‌یابد. در این طرح، مسئله حداقل کردن یک تابع هزینه با افق پیش‌بین بی‌نهایت (مسئله H_2) مورد توجه قرار می‌گیرد تا هم بتوان پایداری سیستم حلقه بسته را تضمین کرد و هم بتوان بر محدودیت انرژی در ماهره‌ها غلبه کرد. همچنین، مسئله کاهش اثر اغتشاشات (مسئله H_∞) مطرح می‌شود تا تأثیرات نامطلوب اغتشاشات تضعیف شود. در نهایت، عملکرد طرح پیشنهادی روی یک ماهره نمونه از طریق شبیه‌سازی نشان داده می‌شود.

تاریخچه داوری

دریافت: ۱۴۰۳/۰۹/۱۲

پذیرش: ۱۴۰۴/۰۲/۰۱

واژه‌های کلیدی

کنترل وضعیت ماهره، دینامیک کلیدزنی، کنترل پیش‌بین مدل کلیدزنی، سیگنال کلیدزنی زمان اقامت ماندگار، عملکرد H_2/H_∞

نحوه استناد به این مقاله

طالب عبدالمهی، "کنترل وضعیت ماهره‌های مبتنی بر کنترل پیش‌بین مدل کلیدزنی H_2/H_∞ با قابلیت مانور در یک محدوده عملکردی گسترده"، دوفصلنامه علوم، فناوری و کاربردهای فضایی، جلد پنجم، شماره دوم، صفحات ۷۴-۵۴، ۱۴۰۴.

مقاله پژوهشی

کنترل وضعیت ماهره‌های مبتنی بر کنترل پیش‌بین مدل کلیدزنی H_2/H_∞ با قابلیت مانور در یک محدوده عملکردی گسترده

طالب عبدالمهی*

۱- استادیار، پژوهشگاه فضایی ایران، تهران، ایران - t.abdollahi@isrc.ac.ir

نویسنده مسئول*

ماهواره است که منجر به عملکرد نامطلوب یا حتی ناپایداری سیستم کنترل وضعیت ماهواره می‌شود. یک راه‌حل برای غلبه به این چالش، تضعیف اثر انرژی اغتشاشات روی انرژی متغیرهای وضعیت سیستم است که با تضمین عملکرد H^∞ برآورده می‌شود. علاوه بر این، در عملیات‌های فضایی به ویژه در مورد ماهواره‌های دارای محدودیت ابعاد و جرم همواره محدودیت انرژی و محدودیت اشباع عملگرها به‌عنوان چالش‌های جدی مطرح بوده است. بنابراین، استراتژی کنترلی بایستی به‌گونه‌ای انتخاب شود که از این محدودیت‌ها تجاوز نشود. یکی از استراتژی‌های کنترلی مقید و بهینه که توانایی غلبه بر چالش‌های ذکر شده را دارد، طرح کنترل پیش‌بین مدل است که در سالیان اخیر در صنایع هوافضا مورد توجه قرار گرفت است. طرح پیش‌بین مدل، یک رویکرد آنلاین است که در هر گام زمانی و براساس شرایط فعلی سیستم، بهره کنترلی را محاسبه می‌کند. بنابراین، بهره کنترلی در هر گام زمانی تغییر می‌کند و این به نوبه خود به افزایش دقت نشانه‌روی و مقابله با تغییرات ناخواسته و اغتشاشات کمک می‌کند [۶].

به طور کلی پژوهش‌های کمی در رابطه با طرح کنترل پیش‌بین مدل برای کنترل وضعیت ماهواره انجام شده است. اکثر این پژوهش‌ها نیز از استراتژی غیرکلیدزنی بهره برده‌اند. برای مثال، در مرجع [۷]، یک طرح ترکیبی شامل: کنترل سطح لغزشی ترمینال و کنترل پیش‌بین مدل خطی برای تضمین پایداری و ردیابی مطلوب در حضور اغتشاشات، عدم قطعیت‌ها و اشباع عملگر موجود در فضاپیماها پیشنهاد شده است. در مرجع [۸]، یک طرح کنترل پیش‌بین مدل برای کنترل وضعیت ماهواره و بازیابی عیب بهینه ارائه شده است. کنترل وضعیت با سه گشتاوردهنده مغناطیسی و یک چرخ عکس‌العملی واحد انجام می‌شود. رویکرد بازیابی بهینه از ویژگی‌های عملگر مغناطیسی استفاده می‌کند که امکان توزیع مجدد عمل کنترل را در صورت بروز عیب روی یک گشتاوردهنده مغناطیسی حتی درغیاب عملگرهای اضافی می‌دهد. در مرجع [۹]، یک طرح کنترل پیش‌بین مقاوم مبتنی بر تیوپ برای پایداری سه محوره ماهواره‌هایی که دارای چرخ عکس‌العملی با محدودیت اشباع هستند، مطالعه شده است. در مرجع [۱۰]، یک کنترل‌کننده پیش‌بین مدل متغیر، با زمان خطی برای کنترل وضعیت ماهواره‌هایی که دارای دو چرخ عکس‌العملی هستند و ماتریس اینرسی آنها غیرقطری است، طراحی شده است. در مرجع [۱۱]، یک طرح کنترل پیش‌بین مدل، برای مدل خطی متغیر با زمان یک نانوماهواره ارائه

حضور در فضا و ماموریت‌های فضایی در سال‌های اخیر رشد بسیار قابل توجهی در کشورهای مختلف دنیا داشته است و سامانه‌های فضایی متنوعی با کارکردهای مختلف مورد توسعه و بهره‌برداری قرار گرفته است. از جمله زیرسیستم‌های مهم یک سامانه فضایی می‌توان به زیرسیستم انرژی الکتریکی، سازه، کنترل حرارت، مخابرات، کامپیوتر روی برد و تعیین و کنترل وضعیت اشاره کرد. بخش کنترل وضعیت سامانه‌های فضایی به عنوان یکی از کلیدی‌ترین و حیاتی‌ترین بخش‌ها در تضمین موفقیت سامانه فضایی شناخته می‌شود. بسیاری از عملیات‌های فضایی مانند انتقال مداری، جهت‌دهی آنتن‌ها، قرار دادن پنل‌های خورشیدی به طرف خورشید و قرار دادن دوربین‌ها به سمت هدف مطلوب به‌صورت مستقیم به دقت و سرعت عملکرد سامانه کنترل وضعیت وابسته هستند و در صورتی که بخش کنترل وضعیت قادر نباشد عملکرد صحیح و مطلوبی ارائه دهد، تمامی هزینه‌های صرف شده برای طراحی و استقرار سامانه فضایی به دلیل شکست ماموریت بی‌ثمر خواهد می‌شود. طراحی سیستم کنترل وضعیت برای سامانه‌های فضایی همانند طراحی کنترل‌کننده برای سایر سیستم‌های صنعتی روزمره دارای چالش‌هایی هست که برای موفقیت‌آمیز بودن طراحی آن باید راهکارهایی برای رفع این چالش‌ها لحاظ کرد [۱-۳].

یکی از چالش‌های مهم در سامانه‌های فضایی، دینامیک پیچیده وضعیت ماهواره است. این پیچیدگی باعث می‌شود که طراحی یک کنترل‌کننده واحد، تضمین‌کننده عملکرد مطلوب سیستم کنترل وضعیت در یک محدوده وسیع نباشد و در شرایط مختلف ممکن است دقت و سرعت نشانه‌روی کاهش پیدا کند. یک راه‌حل برای غلبه به این چالش، به‌کارگیری مفهوم کلیدزنی است. براساس این مفهوم، دینامیک وضعیت ماهواره به چند زیردینامیک شکسته می‌شود و هر کدام از این زیردینامیک‌ها توصیف‌کننده بخشی از رفتار غیرخطی دینامیک وضعیت ماهواره هستند. سپس، یک قانون کلیدزنی تعریف می‌شود که زمان فعال بودن هر کدام از دینامیک‌ها را مشخص می‌کند. حال با استفاده از ابزار موجود در حوزه سیستم‌های کلیدزنی می‌توان به توسعه طرح کنترل وضعیت پرداخت. این امر می‌تواند منجر به تخصیص یک قانون کنترلی برای هر زیردینامیک شود. در نتیجه، هم امکان انجام مانورهای سریع در یک محدوده وسیع میسر می‌شود و هم دقت و سرعت نشانه‌روی افزایش می‌یابد [۴-۵]. چالش مهم دیگر مربوط به تأثیر اغتشاشات مختلف داخلی و خارجی بر

یک ماهواره توسعه یافته است که منجر به ردیابی وضعیت مطلوب می‌شود.

با بررسی پژوهش‌های انجام‌شده در رابطه با طرح کنترل پیش‌بین مدل برای کنترل وضعیت ماهواره می‌توان دریافت که تنها مرجع [۱۹] از مفهوم کلیدزنی برای ردیابی وضعیت ماهواره در یک محدوده وسیع استفاده کرده است. در این مرجع، قید شدت نزولی بودن، روی تابع لیاپانوف در لحظات کلیدزنی وجود دارد که اجازه افزایش انرژی در این لحظات را نمی‌دهد. بنابراین، ممکن است مسئله بهینه‌سازی در بعضی شرایط کاری یا مانورها جوابی نداشته باشد و در نتیجه امکان انجام مانورهای سریع در یک محدوده وسیع میسر نیست. همچنین، چالش‌های اصلی کنترل وضعیت ماهواره شامل اثر اغتشاشات و محدودیت‌های عملگرها نادیده گرفته شده است که باعث می‌شود طرح پیشنهادی در محیط واقعی فضا تا حدودی ناکارآمد باشد. علاوه بر این، این طرح برای ماهواره‌های تجهیز شده با عملگرهای ژاپروی ممان اینرسی توسعه یافته است و قابل اعمال به ماهواره‌های تجهیز شده با عملگرهای چرخ عکس‌العملی نیست. برای غلبه به این ضعف‌ها، در این پژوهش یک طرح همزمان کنترل وضعیت بر اساس رویکرد پیش‌بین مدل کلیدزنی $H2/H\infty$ و سیگنال کلیدزنی زمان اقامت ماندگار از طریق تابع لیاپانوف چندگانه برای ماهواره‌های تجهیز شده با عملگرهای چرخ عکس‌العملی توسعه می‌یابد تا هم امکان انجام مانورهای سریعتر در یک محدوده وسیع فراهم شود و هم با اثر اغتشاشات و محدودیت‌های اشباع چرخ‌های عکس‌العملی مقابله شود. بر این اساس، دستاوردهای اصلی مقاله حاضر به شرح زیر است:

- یک مدل کلیدزنی برای دینامیک وضعیت ماهواره تجهیز شده با سه چرخ عکس‌العملی توسعه داده می‌شود تا به جای پرداختن به یک دینامیک غیرخطی پیچیده، از چند زیردینامیک خطی ساده استفاده شود. این مدل کلیدزنی برخلاف مدل‌های تک دینامیکی غیرخطی امکان کلیدزنی سریع و بالطبع مانورهای سریع را فراهم می‌کند.

- در مدل کلیدزنی به هر زیردینامیک یک قانون کنترلی اختصاص داده می‌شود تا هم امکان ردیابی در یک محدوده وسیع نقاط کاری فراهم شود و هم دقت و سرعت نشانه‌روی افزایش یابد.
- با به کارگیری تابع لیاپانوف چندگانه، قید شدت نزولی بودن انرژی در لحظات کلیدزنی حذف می‌شود. بنابراین، امکان جواب

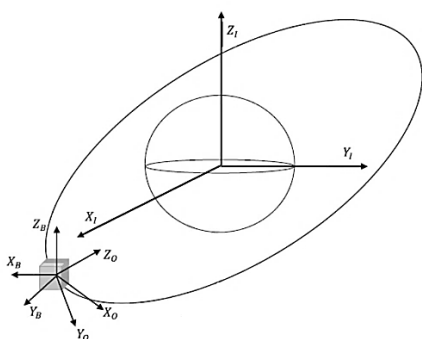
شده است. در مرجع [۱۲]، یک طرح کنترل تحمل‌پذیر عیب بر اساس استراتژی کنترل پیش‌بین مدل صریح در برابر عیب عملگرها ارائه شده است. در این طرح، ابتدا مدل عیب عملگر، با روشی مبتنی بر پیش‌بین مدل صریح ایجاد می‌شود. سپس، با در نظر گرفتن عدم قطعیت مدل و اغتشاشات حالت سیستم، مسئله کنترل بر اساس وضعیت خرابی عملگر فضاپیما به برنامه‌های درجه دوم چند پارامتری تحت محدودیت‌ها تبدیل می‌شود. در نهایت، یک فرآیند بازگشتی از ترکیب و جایگزینی راه‌حل‌ها برای استخراج قوانین کنترل صریح مورد نیاز ارائه می‌شود. در مرجع [۱۳]، یک الگوریتم جدید برای کنترل پیش‌بین مدل غیرخطی تطبیقی صریح با کاربردهایی برای تحمل عیب در مانورهای وضعیت فضاپیماها ارائه شده است. در مرجع [۱۴]، یک طرح کنترل پیش‌بین مدل برای کنترل وضعیت ماهواره‌های کوچک همگام با خورشید که دارای گشتاوردهنده‌های مغناطیسی هستند، توسعه یافته است. در این طرح، ورودی کنترل با استفاده از مدل سیستم برای پیش‌بینی رفتار آینده سیستم ایجاد می‌شود. در مرجع [۱۵]، یک طرح کنترل پیش‌بین مدل توسعه یافته، برای کنترل وضعیت ماهواره در حضور خرابی عملگرها توسعه یافته است. این کنترل‌کننده از مدل سیستم برای بهینه‌سازی متغیر کنترل در یک افق پیش‌بین محدود استفاده می‌کند و یک جواب تقریباً بهینه به دست می‌آورد. استراتژی کنترل از طریق شبیه‌سازی مونت کارلو در دو سناریو شکست شامل: شکست در چرخ عکس‌العملی و شکست در میله گشتاور مغناطیسی آزمایش شد. در مرجع [۱۶] یک طرح کنترل پیش‌بین مدل مرتبه کسری، برای کنترل وضعیت ماهواره پیشنهاد شد. این طرح ابتدا تابع هزینه مرتبه کسری را معرفی کرد و سپس یک قانون کنترل را برای به حداقل رساندن این تابع هزینه استخراج کرد. ویژگی مرتبه کسری به افزایش سرعت همگرایی و دقت کنترل کمک کرد. در مرجع [۱۷] یک طرح کنترل پیش‌بین مدل غیرخطی جدید، بر اساس شناسایی دو مرحله‌ای مدل دینامیکی ماهواره برای کنترل وضعیت ماهواره معرفی شد. در مرجع [۱۸]، یک کنترل پیش‌بین مدل خودتحریک تطبیقی، برای کنترل وضعیت نانوماهواره‌ها برای کاهش حجم محاسبات و حجم انتقال داده، توسعه یافت. پژوهش‌های بسیار کمی از استراتژی کلیدزنی برای طراحی کنترل‌کننده وضعیت ماهواره بهره برده‌اند. این موضوع تنها در مرجع [۱۹] دیده می‌شود. در این مرجع، یک استراتژی کنترل پیش‌بین مدل کلیدزنی با قانون تطبیقی برای کنترل وضعیت

آن در جهت محور چرخش زمین و محور Y آن توسط قانون دست راست تعیین می‌شود.

سیستم مختصات مداری: مرکز این سیستم منطبق بر مرکز جرم ماهواره است. همچنین، محور Z آن در جهت ندیر، محور Y آن عمود بر صفحه مداری و محور X آن به طور تقریبی در جهت سرعت خطی ماهواره است.

سیستم مختصات بدنه: مرکز این سیستم منطبق بر مرکز جرم ماهواره است و محورهای آن همیشه هم‌تراز با محورهای اصلی ماهواره نیست. لذا ممان اینرسی ماهواره I می‌تواند غیرقطری باشد.

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (1)$$



شکل (۱): سیستم‌های مختصات مختلف: سیستم مختصات اینرسی $(X_0Y_0Z_0)$ ، سیستم مختصات مداری $(X_1Y_1Z_1)$ و سیستم مختصات بدنه $(X_BY_BZ_B)$

۲-۲- معادلات سینماتیکی ماهواره

در معادلات سینماتیکی ماهواره، زوایای اوایلر جهت نمایش وضعیت ماهواره در فضا استفاده می‌شوند. جهت دستیابی به معادلات دینامیکی حرکت، ماتریس انتقال بین دستگاه‌های مختصات مختلف مورد نیاز است. برای این منظور، طبق رابطه (۱) از ماتریس انتقال از دستگاه اینرسی به بدنه (R_I^B) استفاده می‌شود که بر اساس توالی ZYX محاسبه شده است:

$$R_I^B = \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\psi) & \sin(\varphi)\sin(\theta)\cos(\psi) - \cos(\varphi)\sin(\psi) & \cos(\varphi)\sin(\theta)\cos(\psi) + \sin(\varphi)\sin(\psi) & \cos(\theta)\sin(\psi) & -\sin(\theta) \\ \sin(\varphi)\sin(\theta)\sin(\psi) + \cos(\varphi)\cos(\psi) & \sin(\varphi)\cos(\theta) & \cos(\varphi)\sin(\theta)\sin(\psi) - \sin(\varphi)\cos(\psi) & \cos(\varphi)\cos(\theta) & \end{pmatrix} \quad (2)$$

که در آن $\theta = (\varphi \ \theta \ \psi)^T$ نمایانگر زوایای اوایلر است و مشتق این زوایا نسبت به زمان از رابطه زیر به دست می‌آید:

داشتن مسئله بهینه‌سازی در مانورهای سریع‌تر و محدوده نقاط کاری وسیع‌تر بیشتر می‌شود.

• مسئله حداقل کردن یک تابع هزینه با افق پیش‌بین بینهایت (مسئله H_2) مورد توجه قرار می‌گیرد تا هم بتوان پایداری سیستم حلقه بسته را تضمین کرد و هم بتوان بر محدودیت انرژی در ماهواره‌ها غلبه کرد.

• مسئله کاهش اثر اغتشاشات (مسئله H_∞) مطرح می‌شود تا بهره انرژی بین اغتشاشات نامعلوم موجود در محیط خشن فضا و خطای ردیابی به حداقل برسد. بنابراین، خطای ردیابی در برابر این اغتشاشات نامعلوم مقاوم می‌شود و در نتیجه، دقت و سرعت نشانه‌روی در مواجهه با تغییرات ناخواسته حفظ می‌شود.

• برقراری ارتباط بین تعداد زیرفضاها با فرکانس کلیدزنی، سطح حذف اغتشاش و مدت زمان انجام مانور و محاسبه تعداد بهینه زیرفضاها به منظور داشتن عملکرد کنترلی بهتر و تعداد مانور در واحد زمان بیشتر حاصل می‌شود.

ساختار ادامه مقاله به شرح زیر است. در بخش ۲، دینامیک وضعیت غیرخطی ماهواره شرح داده می‌شود و مدل کلیدزنی آن استخراج می‌شود. در بخش ۳، طرح کنترل وضعیت پیشنهادی ارائه می‌شود. در بخش ۴، تعداد بهینه زیرفضاها محاسبه می‌شود. در بخش ۵، عملکرد طرح پیشنهادی روی یک ماهواره نمونه از طریق شبیه‌سازی نشان داده می‌شود. در نهایت، در بخش ۶، جمع‌بندی مقاله بیان می‌شود.

۲- مدل‌سازی ریاضی

در این بخش، ابتدا سیستم‌های مختصات مورد استفاده در ماهواره شرح داده می‌شود. سپس، معادلات سینماتیکی و دینامیکی ماهواره بیان می‌شود و در نهایت مدل کلیدزنی آن استخراج می‌شود.

۲-۱- سیستم‌های مختصات ماهواره

به منظور توصیف معادلات سینماتیکی و دینامیکی ماهواره، سه سیستم مختصات شامل: سیستم مختصات اینرسی، سیستم مختصات مداری و سیستم مختصات بدنه مورد استفاده قرار می‌گیرد (شکل ۱) که در ادامه شرح داده می‌شوند.

سیستم مختصات اینرسی: مرکز این سیستم منطبق بر مرکز زمین است. همچنین، محور X آن در جهت اعتدال بهاری، محور Z

$$\tau_{mag} = m_r \times R_I^B B_I \quad (9)$$

که m_r نمایانگر ممان مغناطیسی دوقطبی پسماند در دستگاه بدنه و B_I نمایانگر بردار میدان مغناطیسی زمین در دستگاه اینرسی است. با توجه به رابطه (۵)، رابطه (۴) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{dH_B}{dt} + \omega_{BI}^B \times H_B = \tau_{gg} + \tau_{aero} + \tau_{mag} \quad (10)$$

حال اگر ماهواره شامل سه چرخ عکس‌العملی باشد، تکانه زاویه‌ای ماهواره و مشتق تکانه زاویه‌ای ماهواره به صورت زیر خواهد بود:

$$H_B = I\omega_{BI}^B + I_{w1}\omega_{w1} + I_{w2}\omega_{w2} + I_{w3}\omega_{w3} \quad (11)$$

$$\frac{dH_B}{dt} = I\dot{\omega}_{BI}^B + I_{w1}\dot{\omega}_{w1} + I_{w2}\dot{\omega}_{w2} + I_{w3}\dot{\omega}_{w3} \quad (12)$$

که I_{wi} نمایانگر ممان اینرسی چرخ عکس‌العملی i -ام و ω_{wi} نمایانگر سرعت زاویه‌ای چرخ عکس‌العملی i -ام است. از طرف دیگر، گشتاور کنترلی تولیدی توسط چرخ‌های عکس‌العملی به صورت زیر است:

$$T_c = -I_{w1}\dot{\omega}_{w1} - I_{w2}\dot{\omega}_{w2} - I_{w3}\dot{\omega}_{w3} \quad (13)$$

باتوجه به روابط (۱۰) تا (۱۳)، معادلات دینامیکی ماهواره در حضور چرخ‌های عکس‌العملی به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} I\dot{\omega}_{BI}^B - T_c + \omega_{BI}^B \times (I\omega_{BI}^B + I_{w1}\omega_{w1} + I_{w2}\omega_{w2} + I_{w3}\omega_{w3}) \\ = \tau_{gg} + \tau_{aero} + \tau_{mag} \\ \Rightarrow \dot{\omega}_{BI}^B = -I^{-1}\omega_{BI}^B \times (I\omega_{BI}^B + I_{w1}\omega_{w1} + I_{w2}\omega_{w2} \\ + I_{w3}\omega_{w3}) + I^{-1}T_c + I^{-1}(\tau_{gg} + \tau_{aero} + \tau_{mag}) \end{aligned} \quad (14)$$

اگر چرخ‌های عکس‌العملی در جهت محورهای دستگاه مختصات بدنه (شکل ۲) نصب شوند، پس از آن خواهیم داشت:

$$\omega_{w1} = \begin{pmatrix} \omega_{w1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \omega_{w2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_{w2} \\ 0 \end{pmatrix}, \omega_{w3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{w3} \end{pmatrix} \quad (15)$$

باتوجه به روابط (۱۴) و (۱۵)، معادلات دینامیکی به صورت زیر جمع‌بندی می‌شود:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{pmatrix} = -I^{-1} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_{w1}\omega_{w1} \\ I_{w2}\omega_{w2} \\ I_{w3}\omega_{w3} \end{pmatrix} + I^{-1}T_c \\ + I^{-1}(\tau_{gg} + \tau_{aero} + \tau_{mag}) \end{aligned} \quad (16)$$

همچنین، با توجه به روابط (۱۵) و (۱۶)، داریم:

$$\dot{\Theta} = R(\Theta)\omega_{BI}^B \quad (3)$$

که در آن $\omega_{BI}^B = (\omega_x \ \omega_y \ \omega_z)^T$ بیانگر سرعت زاویه‌ای دستگاه مختصات بدنه نسبت به سیستم مختصات اینرسی توصیف شده در دستگاه مختصات بدنه است. $R(\Theta)$ بر اساس توالی چرخش ZYX به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$R(\Theta) = \begin{pmatrix} 1 & \sin(\varphi)\tan(\theta) & \cos(\varphi)\tan(\theta) \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi)\sec(\theta) & \cos(\varphi)\sec(\theta) \end{pmatrix} \quad (4)$$

۳-۲- معادلات دینامیکی ماهواره

معادلات دینامیکی ماهواره به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{dH_B}{dt} + \omega_{BI}^B \times H_B = \sum \tau_d \quad (5)$$

که H_B نمایانگر تکانه زاویه‌ای ماهواره در دستگاه بدنه و $\sum \tau_d$ نمایانگر گشتاورهای اغتشاشی اعمال شده به بدنه ماهواره در دستگاه بدنه است. در محیط فضا، گشتاورهای اغتشاشی مختلفی به بدنه ماهواره وارد می‌شود که می‌توان به گشتاور گرادیان جاذبه، گشتاور درگ هوا و گشتاور مغناطیسی اشاره کرد. بنابراین داریم:

$$\sum \tau_d = \tau_{gg} + \tau_{aero} + \tau_{mag} \quad (6)$$

که τ_{gg} نمایانگر گشتاور گرادیان جاذبه در دستگاه بدنه، τ_{aero} نمایانگر گشتاور درگ هوا در دستگاه بدنه و τ_{mag} نمایانگر گشتاور مغناطیسی در دستگاه بدنه است. گشتاور گرادیان جاذبه در دستگاه بدنه به طور تقریبی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\tau_{gg} = 3\omega_0^2 (r_3 \times I r_3), \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{\mu}{r_c^3}} \quad (7)$$

که ω_0 نمایانگر نرخ مداری دایروی، $\mu = 398600 \frac{km^3}{s^2}$ نمایانگر ثابت گرانشی زمین، r_c نمایانگر فاصله مرکز زمین تا مرکز جرم ماهواره و r_3 نمایانگر ستون سوم ماتریس کسینوس جهتی است. همچنین، گشتاور درگ هوا توسط رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$\tau_{aero} = r_{ms} \times R_I^B (0.5\rho C_D A_s \|V_{rel}\| V_{rel}) \quad (8)$$

که r_{ms} نمایانگر بردار از مرکز جرم ماهواره به مرکز سطح در دستگاه بدنه، ρ نمایانگر چگالی هوا، C_D نمایانگر ثابت درگ، A_s نمایانگر مساحت سطح موثر و V_{rel} نمایانگر سرعت نسبی ماهواره به اتمسفر در دستگاه اینرسی است.

علاوه بر این، گشتاور مغناطیسی از رابطه زیر به دست می‌آید:

که:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (24)$$

۲-۴- معادلات فضای حالت کلیدزنی

همانطور که در رابطه (۲۱) دیده می‌شود، معادلات حالت ماهواره القاکننده یک رفتار غیر خطی پیچیده است. بنابراین، طراحی تنها یک کنترل کننده برای ردیابی زوایای مطلوب در محدوده وسیعی از فضای حالت امکان پذیر نیست. به منظور غلبه بر این چالش، می‌توان محدوده فضای حالت را به چند زیرفضا تقسیم کرد و برای هر زیرفضا یک نقطه کاری در نظر گرفت. حال با خطی سازی معادلات حالت حول هر نقطه کاری، یک معادله حالت خطی به هر زیرفضا اختصاص می‌یابد. با تجميع این معادلات حالت خطی می‌توان یک سیستم کلیدزنی خطی شکل داد که زیرفضای (زیرسیستم) فعال آن توسط حالت‌ها تعیین می‌شود. به عبارت دیگر، مقدار حالت‌ها در هر لحظه تعیین می‌کند که کدام زیرفضا فعال است. توجه شود که هر چه تعداد زیرفضای در نظر گرفته شده بیشتر باشد، سیستم کلیدزنی خطی شکل گرفته تقریب بهتری از معادلات حالت ماهواره را ارائه می‌کند. شکل ۳ نمونه‌ای از زیرفضاهای در نظر گرفته شده به همراه نقاط کاری را نشان می‌دهد. براساس توضیحات ارائه شده، سیستم کلیدزنی خطی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\delta \dot{X} = A_{\sigma(t)} \delta X + B_{\sigma(t)} \delta u + F_{\sigma(t)} \delta f, \quad (25)$$

$$\sigma(t) \in M = \{1, \dots, m\}$$

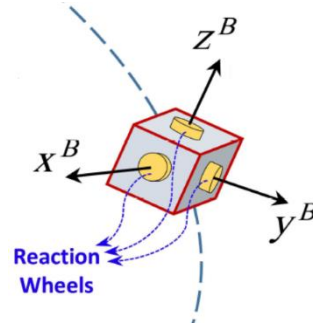
که $\sigma(t)$ نمایانگر سیگنال کلیدزنی و M نمایانگر مجموعه زیر فضاها است و:

$$A_{\sigma(t)} = \left. \frac{\partial F}{\partial X} \right|_{X=X_{\sigma(k)}}, \quad B_{\sigma(t)} = \left. \frac{\partial F}{\partial u} \right|_{X=X_{\sigma(k)}}, \quad (26)$$

$$F_{\sigma(t)} = \left. \frac{\partial F}{\partial w} \right|_{X=X_{\sigma(k)}}$$

تذکره ۱: خط چین‌های نشان داده شده در شکل ۳ بیانگر مرزهای بین زیرفضاها است. اگر مسیر حالت سیستم یک خط چین را قطع کند، یک انتقال بین زیرفضاها یا یک کلیدزنی اتفاق می‌افتد. بنابراین، در یک مانور ممکن است چندین کلیدزنی اتفاق بیفتد. همچنین، با توجه به اینکه فضای حالت نشان داده شده در شکل ۳ دارای ۱۶ زیرفضا است، سیگنال کلیدزنی $\sigma(t)$ می‌تواند مقادیری بین ۱ تا ۱۶ داشته باشد که نشان دهنده زیرفضای فعال است.

$$T_c = \begin{pmatrix} -I_{w1} \dot{\omega}_{w1} \\ -I_{w2} \dot{\omega}_{w2} \\ -I_{w3} \dot{\omega}_{w3} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{\omega}_{w1} \\ \dot{\omega}_{w2} \\ \dot{\omega}_{w3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{I_{w1}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{I_{w2}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{I_{w3}} \end{pmatrix} T_c \quad (17)$$



شکل (۲): ساختار هندسی چرخ‌های عکس‌العملی

حال تعریف می‌کنیم:

$$X = (\varphi \ \theta \ \psi \ \omega_x \ \omega_y \ \omega_z \ \omega_{w1} \ \omega_{w2} \ \omega_{w3})^T \quad (18)$$

$$u = T_c \quad (19)$$

$$\dot{f} = \tau_{gg} + \tau_{aero} + \tau_{mag} \quad (20)$$

$$F(X, u, f) = \begin{pmatrix} 1 & \sin(\varphi) \tan(\theta) & \cos(\varphi) \tan(\theta) & \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & \\ 0 & \sin(\varphi) \sec(\theta) & \cos(\varphi) \sec(\theta) & \\ -I^{-1} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \times \left(I \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_{w1} \omega_{w1} \\ I_{w2} \omega_{w2} \\ I_{w3} \omega_{w3} \end{pmatrix} \right) \\ + I^{-1} u + I^{-1} f \\ \begin{pmatrix} -\frac{1}{I_{w1}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{I_{w2}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{I_{w3}} \end{pmatrix} u \end{pmatrix} \quad (21)$$

معادلات حالت مربوط به معادلات سینماتیکی و دینامیکی

ماهواره در حضور چرخ عکس‌العملی به صورت زیر خواهد بود:

$$\dot{X} = F(X, u, w) \quad (22)$$

همچنین، باتوجه به اینکه یکی از اهداف کنترلی ردیابی مقادیر مطلوب زوایای اوایلر است، معادله اندازه‌گیری به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$y = CX \quad (23)$$

$$E(k+1) = A_{d\sigma(k)}E(k) + B_{d\sigma(k)}u_{\sigma(k)}(k) + F_{d\sigma(k)}f(k) \quad (29)$$

$\sigma(k) \in M = \{1, \dots, m\}$

۳- طرح کنترل پیشنهادی

سیستم کلیدزنی غیرخطی زمان گسسته را به صورت زیر در نظر

بگیرید:

$$E(k+1) = A_{d\sigma(k)}E(k) + B_{d\sigma(k)}u(k) + F_{d\sigma(k)}f(k) \quad (30)$$

$$o(k) = \begin{pmatrix} P_{d\sigma(k)}E(k) \\ Q_{d\sigma(k)}u(k) \end{pmatrix} \quad (31)$$

که $o(k) \in R^{n_o}$ ، $u(k) \in R^{n_u}$ ، $E(k) \in R^{n_e}$ و $f(k) \in R^{n_f}$ به ترتیب معرف حالت‌های سیستم، ورودی کنترل، خروجی کنترل شده و اغتشاشات هستند. سیگنال کلیدزنی به صورت $\sigma(k): [0, \infty) \rightarrow M = \{1, 2, \dots, m\}$ نشان داده می‌شود. ماتریس‌های $A_{d\sigma(k)}$ ، $B_{d\sigma(k)}$ ، $P_{d\sigma(k)}$ ، $Q_{d\sigma(k)}$ و $F_{d\sigma(k)}$ نمایانگر ماتریس‌های حقیقی فضای حالت با ابعاد مناسب هستند.

فرض ۱: انرژی اغتشاش به صورت زیر محدود می‌شود:

$$\|f(k)\|_{L_2}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} f^T(k)f(k) \leq f_{\max} \quad (32)$$

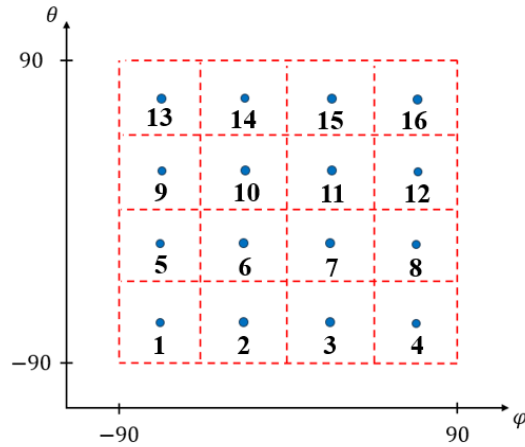
که $\| \cdot \|_{L_2}$ نمایانگر نرم L_2 یک سیگنال است.

برای توسعه کنترل کننده، تعاریف مورد نیاز به شرح زیر ارائه می‌شوند.

تعریف ۱: بر اساس ساختار کلیدزنی زمان اقامت ماندگار (شکل ۴)، یک سیگنال کلیدزنی به تعدادی پنجره تقسیم می‌شود که هر پنجره از دو قسمت شامل قسمت λ و قسمت α تشکیل می‌شود. در قسمت λ ، یک زیر سیستم خاص با زمان اجرا بیشتر از λ فعال می‌شود و در قسمت α ، تعداد زیادی کلیدزنی به ترتیب در زمان فرکانس کمتر از α و β رخ می‌دهد. λ و α به ترتیب زمان ماندگاری و دوره ماندگاری نامیده می‌شوند. تعداد کلیدزنی در قسمت α از یک پنجره دلخواه p با ناتساوی زیر محدود می‌شود $[20]$:

$$N(k_{s_p+1}, k_{s_{p+1}}) \leq \alpha\beta \quad (33)$$

که k_{s_p+1} و $k_{s_{p+1}}$ به ترتیب اولین و آخرین لحظه کلیدزنی در قسمت α در پنجره p هستند.



شکل (۳): زیرفضاها (خط چین قرمز) و نقاط کاری (نقاط آبی)

تذکر ۲: به دلیل اینکه تابع F وابسته به زاویه ψ نیست، ماتریس فضای حالت $A_{d\sigma(k)}$ نیز به زاویه ψ وابسته نیست. در نتیجه، همانطور که در شکل ۳ دیده می‌شود، زاویه ψ در تقسیم‌بندی نواحی نقشی ندارد.

حال بر اساس روش گسسته‌سازی مرتبه اول اوپلر، سیستم کلیدزنی در رابطه (۲۶) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$X(k+1) = A_{d\sigma(k)}X(k) + B_{d\sigma(k)}u_{\sigma(k)}(k) + F_{d\sigma(k)}f(k), \quad \sigma(k) \in M = \{1, \dots, m\} \quad (27)$$

اگر $X_d(k)$ نمایانگر مقدار مطلوب حالت‌ها باشد، آنگاه با فرض $X_d(k+1) = X_d(k)$ ، دینامیک خطای ردیابی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} E(k+1) &= X(k+1) - X_d(k+1) \\ &= A_{d\sigma(k)}X(k) + B_{d\sigma(k)}u_{\sigma(k)}(k) + F_{d\sigma(k)}f(k) \\ &\quad - X_d(k) = A_{d\sigma(k)}(X(k) - X_d(k)) + B_{d\sigma(k)} \\ &\quad u_{\sigma(k)}(k) + F_{d\sigma(k)}f(k) + (A_{d\sigma(k)} - I)X_d(k) \\ &= A_{d\sigma(k)}E(k) + B_{d\sigma(k)}u_{\sigma(k)}(k) \\ &\quad + F_{d\sigma(k)}f(k) + (A_{d\sigma(k)} - I)X_d(k) \end{aligned} \quad (28)$$

$\sigma(k) \in M = \{1, \dots, m\}$

باتوجه به ماتریس فضای حالت $A_{d\sigma(k)}$ استخراج شده برای هر ناحیه و در نظر گرفتن $X_d(k) = (\varphi_d \ \theta_d \ \psi_d \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$ ، میتوان نشان داد که $(A_{d\sigma(k)} - I)X_d(k) \approx 0$. بنابراین، رابطه (۲۸) به صورت زیر خواهد بود:

که ω افق پیش‌بین است. قانون کنترل پس‌خور حالت به شرح زیر است:

$$\mathbf{u}_{i,k}(k+\omega|k) = \mathbf{G}_{i,k} \mathbf{E}(k+\omega|k), \omega = 0, 1, \dots, \infty \quad (36)$$

که در آن $\mathbf{G}_{i,k}$ نمایانگر بهره کنترل پس‌خور است. مؤلفه e -ام بردار ورودی تعریف شده در (36) دارای محدودیت زیر است:

$$|\mathbf{u}_{i,k}^e(k+\omega|k)| \leq u_{e,\max}, \quad e = 1, 2, \dots, n_u \quad (37)$$

که در آن $u_{e,\max}$ کران بالای مؤلفه e -ام بردار ورودی است. **قضیه ۱.** سیستم کلیدزنی (30)-(31) را تحت فرض ۱ و قید ورودی (37) در نظر بگیرید. همچنین فرض کنید که پارامترهای تصمیم‌گیری $-1 < a_s < 0$ ، $\varepsilon > 1$ ، $\gamma > 0$ و $f_{\max}$ و پارامترهای ساختار زمان اقامت ماندگار α و β انتخاب شده هستند. حال اگر ماتریس‌های $\mathbf{R}_{i,k} > 0$ و $\mathbf{G}_{i,k}$ به‌گونه‌ای وجود داشته باشند که مسائل بهینه‌سازی زیر را برآورده سازند:

$$\min_{\mathbf{R}_{i,k}, \mathbf{G}_{i,k}} \delta_{i,k} \quad (38)$$

$$\begin{pmatrix} \delta_{i,k} & \mathbf{E}(k)^T & \gamma^2 f_{\max} \\ * & \mathbf{R}_{i,k}^{-1} & 0 \\ * & * & \gamma^2 f_{\max} \end{pmatrix} \geq 0 \quad (39)$$

$$\begin{pmatrix} -\bar{\mathbf{A}}_{di,k}^T \mathbf{R}_{i,k} \bar{\mathbf{A}}_{di,k} + \mathbf{R}_{i,k} & -\bar{\mathbf{A}}_{di,k}^T \mathbf{R}_{i,k} \mathbf{F}_{di} \\ -\mathbf{P}_{di}^T \mathbf{P}_{di} - \mathbf{G}_{i,k}^T \mathbf{Q}_{di} & * \\ \mathbf{Q}_{di} \mathbf{G}_{i,k} + a_s \mathbf{R}_{i,k} & -\mathbf{F}_{di}^T \mathbf{R}_{i,k} \mathbf{F}_{di} + \gamma^2 \mathbf{I} \end{pmatrix} \geq 0 \quad (40)$$

$$\varepsilon \mathbf{R}_{j,k-1} - \mathbf{R}_{i,k} \geq 0, \quad j = \sigma(k-1) \quad (41)$$

$$\begin{pmatrix} u_{e,\max}^2 & \mathbf{V}^e \mathbf{G}_{i,k} \\ * & \delta_{i,k}^{-1} \mathbf{R}_{i,k} \end{pmatrix} \geq 0, \quad e = 1, \dots, n_u \quad (42)$$

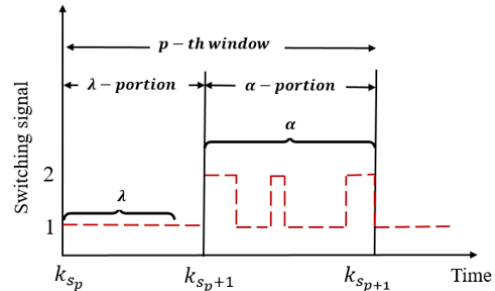
که در آن $*$ معرف عبارت‌های متقارن در ماتریس‌ها، $\delta_{i,k}$ معرف کران بالا برای تابع هزینه $(J_{i,k})$ ، a_s معرف نرخ تغییرات انرژی در زیرسیستم‌ها، ε ضریب محدود کننده افزایش انرژی در لحظات کلیدزنی است:

$$\bar{\mathbf{A}}_{di,k} = \mathbf{A}_{di} + \mathbf{B}_{di} \mathbf{G}_{i,k} \quad (43)$$

و آنگاه برای قانون کنترل پس‌خور حالت ماندگار که شرط زیر را برآورده کند:

$$\lambda > \lambda^* = \max\left\{\frac{(\alpha\beta+1)\ln\varepsilon}{-\ln(1+a_s)}, \frac{1}{\beta}\right\} \quad (44)$$

تذکر ۳: همانطور که پیش از این گفته شد، انتقال از یک زیرفضا به زیرفضای دیگر باعث کلیدزنی می‌شود. بنابراین، یک مانور ممکن است منجر به چند کلیدزنی شود و در نتیجه، یک سیگنال کلیدزنی ایجاد شود. در این پژوهش، ساختار کلیدزنی زمان اقامت ماندگار به‌گونه‌ای طراحی می‌شود که سیگنال‌های کلیدزنی ایجاد شده توسط مانورهای مختلف عضوی از این ساختار باشند. **تعریف ۲:** عملکرد H_∞ برای سیستم کلیدزنی (30) و (31) به‌صورت زیر جمع‌بندی می‌شود [21]:



شکل (۴): ساختار کلیدزنی زمان اقامت ماندگار

(۱) نقطه تعادل $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ در سیستم کلیدزنی (30) تحت سیگنال کلیدزنی $\sigma(k)$ با $\mathbf{u}(k) \equiv 0$ و $\mathbf{f}(k) \equiv 0$ به صورت یکنواخت مجانبی پایدار است، به این معنی که یک کلاس از توابع κ_∞ و یک ثابت مثبت c وجود دارد، به طوری که پاسخ سیستم ناتساوی زیر را ارضا کند:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{E}(k)\| &\leq \alpha(\|\mathbf{E}(k_0)\|) \quad \forall k \geq k_0, \|\mathbf{E}(k_0)\| \leq c, \\ \|\mathbf{E}(k)\| &\rightarrow 0 \quad \text{as } k \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (34)$$

(۲) ثابت مثبت γ_L ، ناتساوی $\|\mathbf{o}(k)\|_{L_2}^2 \leq \gamma_L^2 \|\mathbf{f}(k)\|_{L_2}^2$ تحت $\mathbf{E}(k_0) = \mathbf{0}$ ، $\mathbf{u}(k) \equiv 0$ و $\mathbf{f}(k) \neq 0$ برای سیستم کلیدزنی (30)-(31) برقرار است.

در ادامه به ارائه طرح کنترل پیش‌بین پرداخته می‌شود. طرح پیش‌بین مدل، شامل یک مسئله بهینه‌سازی گام به گام است که در هر گام، تابع هزینه بر اساس ورودی‌ها و حالت‌های پیش‌بین شده به حداقل می‌رسد. فرض می‌شود که $\mathbf{u}(k+\omega|k)$ ، $\mathbf{E}(k+\omega|k)$ و $\sigma(k+\omega|k)$ به ترتیب ورودی پیش‌بینی شده، حالات پیش‌بینی شده و سیگنال کلیدزنی پیش‌بینی شده باشند. همچنین، مقدار سیگنال کلیدزنی در افق پیش‌بین، ثابت فرض می‌شود. جهت طراحی کنترل کننده، یک تابع هزینه با افق پیش‌بین نامحدود به شرح زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$J_{i,k} = \|\mathbf{o}(k+\omega|k)\|_{L_2}^2, \quad \omega = 0, 1, \dots, \infty \quad (35)$$

دارای پایداری مجانبی یکنواخت سراسری و عملکرد H^∞ با سطح تضعیف اغتشاش (۴۵) است. اثبات. پیوست ۲ را ببینید.

تذکر ۴: پارامتر γ بر اساس نیازمندی‌های کنترل، تعیین می‌شود. اگر γ کاهش یابد، آنگاه با توجه به رابطه (۴۵)، کاهش می‌یابد. در نتیجه، عملکرد کنترل‌کننده بهتر می‌شود. از طرف دیگر، اگر γ کاهش یابد، آنگاه ناحیه امکان‌پذیری کوچکتر می‌شود. بنابراین، این پارامتر باید بر اساس مصالحه بین عملکرد کنترل‌کننده و ناحیه امکان‌پذیری انتخاب شود. پارامترهای a_s و ε به ترتیب بر اساس نرخ تغییرات تابع لیاپانوف مورد انتظار در زیرسیستم‌ها و لحظات کلیدزنی تعیین می‌شوند. اگر هر یک از این پارامترها کاهش یابد، آنگاه با توجه به روابط (۴۴) و (۴۵)، λ و γ_L نیز کاهش می‌یابند. در نتیجه، کنترل‌کننده در برابر کلیدزنی‌های سریعتر مقاوم است و عملکرد آن بهبود می‌یابد. از طرف دیگر، اگر هر یک از این پارامترها کاهش یابد، آنگاه ناحیه امکان‌پذیری کوچکتر می‌شود. بنابراین، در اینجا باید مصالحه دیگری بین سازگاری با نرخ کلیدزنی بالاتر و ناحیه امکان‌پذیری برقرار شود.

۴- محاسبه تعداد بهینه زیرفضاها

در این بخش ابتدا به ارتباط بین تعداد زیرفضاها با زمان مانور، سطح حذف اغتشاش و عملکرد کنترل‌کننده پرداخته می‌شود و سپس بر اساس آن، یک مقدار بهینه برای تعداد زیرفضا استخراج می‌شود. اگر کل فضای حالت مربعی شکل به n زیرفضای مربعی شکل تقسیم شود، آنگاه، حداکثر تعداد انتقال بین زیرفضاها برای بزرگترین مانور برابر $2(\sqrt{n}-1)$ خواهد بود. برای مثال، همانطور که در شکل ۵ دیده می‌شود، حداکثر تعداد انتقال بین زیرفضاها برای بزرگترین مانور در یک فضای مربعی با ۱۶ زیرفضای مربعی برابر ۶ خواهد بود. بر این اساس، تعداد کلیدزنی در قسمت α از یک پنجره دلخواه p به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$N(k_{sp+1}, k_{sp+1}) = 2(\sqrt{n}-1) \quad (51)$$

با توجه به رابطه (۵۱)، فرکانس کلیدزنی در قسمت α از یک پنجره دلخواه p به صورت زیر خواهد بود:

$$\beta = \frac{2(\sqrt{n}-1)}{\alpha} \quad (52)$$

بر اساس روابط (۴۴)، (۴۵) و (۵۲)، خواهیم داشت:

سیستم کلیدزنی حلقه بسته در (۳۰)-(۳۱) با توجه به محدودیت ورودی (۳۷) و تحت فرض ۱ دارای پایداری مجانبی یکنواخت سراسری و عملکرد H^∞ با سطح تضعیف اغتشاش (۴۵) خواهد بود:

$$\gamma_L = \sqrt{\frac{-a_s \gamma^2 \eta}{1-\rho}} \quad (45)$$

$$\rho = \varepsilon^{\frac{\alpha\beta+1}{\alpha+\lambda}} (1+a_s) \quad \text{و} \quad \eta = \varepsilon^{\alpha\beta+1}$$

اثبات. پیوست ۱ را ببینید.

مسئله بهینه‌سازی غیرمحدب در (۳۸)-(۴۲) باید به عنوان یک بهینه‌سازی ناتساوی ماتریسی خطی جمع‌بندی شود. بنابراین قضیه زیر ارائه می‌شود.

قضیه ۲: سیستم کلیدزنی (۳۰)-(۳۱) را تحت فرض ۱ و قید ورودی (۳۷) در نظر بگیرید. همچنین فرض کنید که پارامترهای تصمیم‌گیری $-1 < a_s < 0$ ، $\varepsilon > 1$ ، $\gamma > 0$ و $f_{\max}$ و پارامترهای ساختار زمان اقامت ماندگار α و β انتخاب شده باشند. حال اگر ماتریس‌های $N_{i,k}$ ، $M_{i,k}$ ، $K_{i,k} > 0$ به گونه‌ای وجود داشته باشند که مسئله بهینه‌سازی زیر را ارضا کنند:

$$\min_{K_{i,k}, M_{i,k}, N_{i,k}} \delta_{i,k} \quad (46)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & E(k)^T & \gamma^2 f_{\max} \\ * & K_{i,k} & 0 \\ * & * & \delta_{i,k} \gamma^2 f_{\max} \end{pmatrix} \geq 0 \quad (47)$$

$$\begin{pmatrix} (1+a_s)(N_{i,k} + N_{i,k}^T - K_{i,k}) & N_{i,k}^T P_{di}^T & M_{i,k}^T Q_{di}^T \\ * & \delta_{i,k} I & 0 \\ * & * & \delta_{i,k} I \\ * & * & * \\ 0 & (A_{di} N_{i,k} + B_{di} M_{i,k})^T & \\ 0 & 0 & \\ \delta_{i,k} \gamma^2 I & \delta_{i,k} F_{di}^T & \\ * & K_{i,k} & \end{pmatrix} \geq 0 \quad (48)$$

$$K_{i,k} - E(k) \theta^{-1} \delta_{i,k} v_{j,k-1} (E(k))^{-1} E(k)^T \geq 0 \quad (49)$$

$$\begin{pmatrix} N_{i,k} + N_{i,k}^T - K_{i,k} & M_{i,k}^T V_{eT} \\ * & -2 \\ & u_{e,\max} \end{pmatrix} \geq 0 \quad (50)$$

آنگاه، برای بهره کنترل $N_{i,k} M_{i,k}^{-1}$ و هر سیگنال کلیدزنی زمان اقامت ماندگار ارضا کننده (۴۴)، سیستم کلیدزنی حلقه بسته در (۳۰)-(۳۱) با توجه به محدودیت ورودی (۳۷) و تحت فرض ۱

$$\|E(k_{s_p+1})\| \leq \kappa_1^{-1} (e^{(2\sqrt{n}-1)\ln \varepsilon} (e^{\lambda \ln(1+a_s)} \kappa_2 (\|E(k_{s_p})\| + \gamma^2 f_{\max}))) \quad (56)$$

اجازه دهید مقادیر $\|E(k_{s_p})\|$ و $\|E(k_{s_p+1})\|$ را به ترتیب به عنوان شرط اولیه حالت‌ها و شرط نهایی حالت‌ها (محدوده همگرایی) در نظر بگیریم. با ثابت در نظر گرفتن پارامترهای ε ، γ و $f_{\max}$ ، میتوان استنباط کرد که مقادیر n و λ روی زمان رسیدن به محدوده همگرایی تأثیرگذار هستند. به دلیل اینکه مقدار λ از جنس زمان و وابسته به مقدار n است، این پارامتر را به عنوان معیاری برای زمان مانور در نظر می‌گیریم. بنابراین، هر چه مقدار پارامتر λ کوچکتر باشد، زمان انجام یک مانور کوچکتر است و این قابلیت ایجاد می‌شود که تعداد مانور بیشتری در واحد زمان داشته باشیم.

با توجه به تحلیل‌های انجام شده میتوان نتیجه گرفت که مقدار حداقل n ، باید به گونه‌ای انتخاب شود که مقادیر پارامترهای λ و γ_L حداقل شوند تا هم عملکرد کنترل‌کننده مطلوب‌تر باشد و هم تعداد مانور بیشتری در واحد زمان داشته باشیم. البته باید توجه شود که کاهش مقدار n روی دقت مدل‌سازی نیز تأثیرگذار است و ممکن است باعث کاهش عملکرد کنترل‌کننده شود. بنابراین در انتخاب n ، بایستی مصالحه‌ای بین مقادیر پارامترهای λ و γ_L و دقت مدل‌سازی انجام شود.

مطابق با قضایای مطرح شده در فوق، بلوک دیاگرام طرح پیشنهادی برای کنترل وضعیت سه محوره ماهواره مطابق با شکل ۶ به تصویر کشیده شده است. شیوه حل و پیاده‌سازی طرح پیشنهادی از دو مرحله به شرح زیر تشکیل می‌شود:

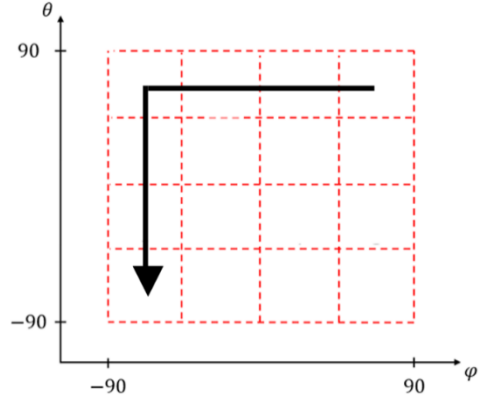
مرحله محاسبات قطع خط:

۱- مقادیر پارامترهای مشترک شامل a_s و ε ، مقادیر پارامترهای اغتشاش شامل γ و $f_{\max}$ و مقادیر پارامتر سیگنال کلیدزنی α توسط طراح انتخاب می‌شوند و در حافظه ذخیره می‌شوند.

۲- با توجه به روابط (53) و (54)، حداقل مقدار n به گونه‌ای به دست می‌آید که مقادیر λ^* و γ_L حداقل شوند. با مشخص شدن n ، کل فضای حالت به n^2 زیرفضای مربعی تقسیم می‌شود و نقاط کاری در مرکز هر زیرفضا مشخص می‌شود. سپس، با خطی‌سازی دینامیک ماهواره حول نقطه کاری زیرفضای i ام، ماتریس‌های دینامیک خطی زیرفضای i ام شامل A_i ، B_i و C_i به دست می‌آیند.

$$\lambda > \lambda^* = \max\left(\frac{(2\sqrt{n}-1)\ln \varepsilon}{-\ln(1+a_s)}, \frac{\alpha}{2(2\sqrt{n}-1)}\right) \quad (53)$$

$$\gamma_L = \sqrt{\frac{-a_s \gamma^2 \varepsilon^{(2\sqrt{n}-1)}}{1 - \varepsilon^{\frac{(2\sqrt{n}-1)}{\alpha+\lambda}} (1+a_s)}} \quad (54)$$



شکل (۵): انتقال بین زیرفضاها برای بزرگترین مانور

حال با توجه به روابط (53) و (54) و ثابت در نظر گرفتن پارامترهای a_s ، ε ، γ و α ، میتوان تأثیر پارامتر n روی مقدار زمان اقامت ماندگار و سطح حذف اغتشاش را بررسی کرد. در ادامه، با توجه به روابط (پ ۱-۲۲) و (52)، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} v_n(E(k_{s_p+1})) &\leq e^{(2\sqrt{n}-1)\ln \varepsilon + \lambda \ln(1+a_s)} v_m(E(k_{s_p})) \\ &- \sum_{R=k_{s_p}}^{k_{s_p+1}} \varepsilon^{N(R, k_{s_p+1})} (1+a_s)^{k_{s_p+1}-R} \Omega(R) \\ \Rightarrow v_n(E(k_{s_p+1})) &\leq e^{(2\sqrt{n}-1)\ln \varepsilon + \lambda \ln(1+a_s)} v_m(E(k_{s_p})) \\ &- \varepsilon^{\alpha\beta+1} \sum_{R=k_{s_p}}^{k_{s_p+1}} \Omega(R) \\ \Rightarrow v_n(E(k_{s_p+1})) &\leq e^{(\alpha\beta+1)\ln \varepsilon + \lambda \ln(1+a_s)} v_m(E(k_{s_p})) \\ &- \varepsilon^{2\sqrt{n}-1} \sum_{R=k_{s_p}}^{k_{s_p+1}} -\gamma^2 f^T(R) f(R) \\ \Rightarrow v_n(E(k_{s_p+1})) &\leq e^{(2\sqrt{n}-1)\ln \varepsilon} (e^{\lambda \ln(1+a_s)} v_m(E(k_{s_p})) + \gamma^2 f_{\max}) \end{aligned} \quad (55)$$

$$v_n(E(k_{s_p+1})) \geq \lambda_{\min}(R_{\sigma(k_{s_p+1})}) \|E(k_{s_p+1})\|^2 = \kappa_1 \quad \text{بر اساس}$$

$$v_n(E(k_{s_p})) \leq \lambda_{\max}(R_{\sigma(k_{s_p})}) \|E(k_{s_p})\|^2 = \kappa_2 \quad \text{و}$$

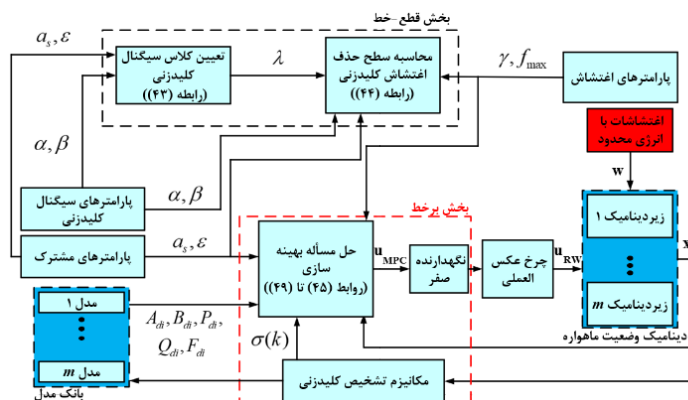
رابطه زیر قابل استخراج است:

۱- یک مکانیزم تشخیص زیرفضای فعال روی پردازنده پیاده‌سازی می‌شود. در این مکانیزم، در هر گام زمانی k ، فاصله همه نقاط کاری تا مقدار حالت جاری اندازه‌گیری می‌شود. سپس، زیرفضای مربوط به نقطه کاری که کمترین فاصله را با حالت جاری دارد به عنوان زیرفضای فعال انتخاب می‌شود.

در نهایت، مقادیر n ، λ^* ، γ_L ، تمامی ماتریس‌های مربوط به دینامیک خطی زیرفضاها و تمامی نقاط کاری در حافظه ذخیره می‌شوند.

۳- طبق رابطه (۵۲)، مقدار β محاسبه می‌شود و در حافظه ذخیره می‌گردد.

مرحله محاسبات بر خط:



شکل (۶): بلوک دیاگرام طرح کنٹرلی

۷- ورودی کنترلی در گام زمانی k به نگهدارنده مرتبه صفر اعمال می‌شود و در نهایت خروجی نگهدارنده صفر به سیستم اعمال می‌شود.

۸- مراحل ۵ تا ۷ در گام‌های زمانی بعد تکرار می‌شود.

۵- شبیه سازی

در این بخش، عملکرد طرح پیشنهادی روی یک ماهواره نمونه مورد بررسی قرار می‌گیرد. مشخصات ماهواره و مشخصات چرخ عکس‌عملی در جدول ۱ داده شده است. همچنین، مقادیر پارامترهای سیگنال کلیدزنی، پارامترهای مشترک و پارامترهای اغتشاش در جدول ۲ آورده شده است. با قرار دادن مقادیر مختلف n در روابط (۵۳) و (۵۴)، شکل ۷ به‌دست می‌آید. بر اساس این شکل، مقدار ۱۶ به عنوان مقدار بهینه n انتخاب می‌شود. همچنین،

با مشخص شدن مقدار λ^* ، کلاس سیگنال کلیدزنی نیز مشخص می‌گردد. حال، اگر سیگنال کلیدزنی ایجاد شده توسط مسیر حرکت حالت‌ها عضوی از این کلاس باشد، کنترل‌کننده تمامی نیازمندی‌های مورد نظر را برآورده می‌کند. همچنین مقدار λ_L ، نشان‌دهنده سطح تأثیر اغتشاشات بر خروجی کنترل‌شده با وجود کلیدزنی‌های متوالی، است.

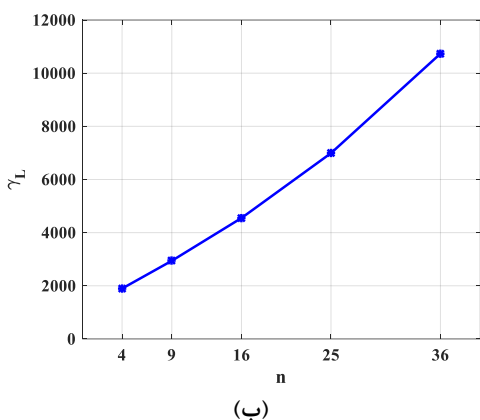
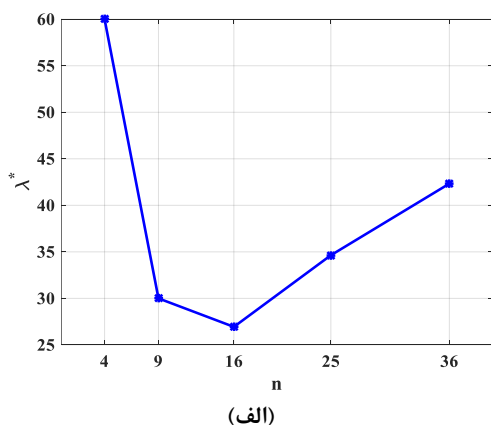
۲- یک مکانیزم تشخیص انتقال بین زیرفضاها روی پردازنده پیاده‌سازی می‌شود. در این مکانیزم، زیرفضای فعال در گام زمانی k با زیرفضای فعال در گام زمانی $k-1$ مقایسه می‌گردد. اگر زیرفضاها با هم متفاوت باشند، آنگاه یک انتقال بین زیرفضاها تشخیص داده می‌شود.

۳- مسئله بهینه‌سازی (۴۶) تا (۵۰) در قضیه ۲ روی پردازنده پیاده‌سازی می‌شود.

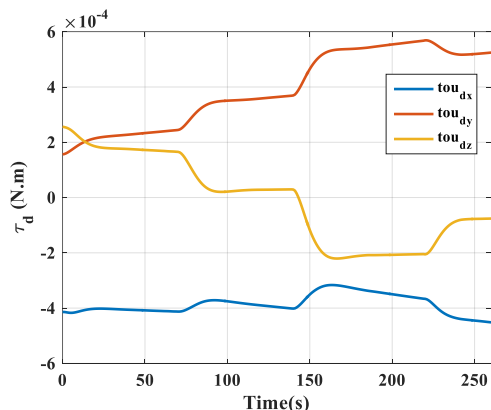
۴- یک حل کننده مسائل نامساوی ماتریسی خطی مانند بالمیپ روی پردازنده پیاده سازی می شود.

۵- با توجه به زیرفضای فعال در گام زمانی k ، مقادیر ماتریس‌های دینامیک خطی متناظر با آن از حافظه فراخوانی می‌شوند. همچنین، مقادیر پارامترهای کنترل‌کننده که در بخش محاسبات قطع خط در حافظه ذخیره شدند، فراخوانی می‌شوند. این مقادیر در مسئله بهینه‌سازی (۴۶) تا (۵۰) در قضیه ۲ جایگذاری می‌شوند.

۶- مسئله بهینه‌سازی (۴۶) تا (۵۰) در گام زمانی k توسط حل‌کننده یالمپ حل می‌شود و بهره کنترلی $G_{i,k}$ محاسبه می‌شود. سپس ورودی کنترلی $u_{i,k}(k) = G_{i,k}X(k)$ در گام زمانی k به‌دست می‌آید.



شکل (۷): رابطه بین مقدار n با زمان اقامت ماندگار و سطح حذف اغتشاش



شکل (۸): مجموع اغتشاشات اعمال شده به بدنه ماهواره

شکل ۸ مجموع اغتشاشات اعمال شده به بدنه ماهواره که شامل اغتشاش گرادیان جاذبه، اغتشاش آیرودینامیکی و اغتشاش مغناطیسی است را نشان می‌دهد. در طول انجام هر کدام از مانورها، مسئله بهینه‌سازی در هر گام زمانی به صورت برخط حل می‌شود و ورودی کنترلی به‌دست می‌آید. سپس، ورودی کنترلی از نگهدارنده

جدول (۱): مشخصات ماهواره و چرخ عکس‌العملی

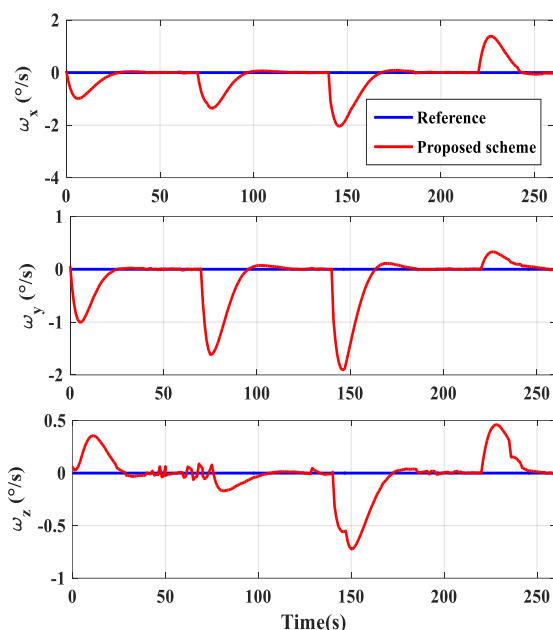
پارامتر	مقدار
مشخصات مداری ماهواره	$r(\text{Semi-majoraxis}) = 6931.1\text{km}$ $M_0(\text{Mean anomaly}) = 0\text{deg}$ $e_0(\text{Eccentricity}) = 0$ $i_0(\text{Inclination}) = 55\text{deg}$ $\omega_0(\text{Argument of perigee}) = 0\text{deg}$ $\Omega_0(\text{Righth ascension of ascending node}) = 203\text{deg}$
انتشار دهنده مداری	J_2
ماتریس ممان اینرسی	$I = \begin{pmatrix} 40.45 & -0.2 & -0.50 \\ -0.2 & 42.09 & 0.40 \\ -0.5 & 0.40 & 41.36 \end{pmatrix} \text{kg.m}^2$
مشخصات چرخ عکس-العملی	$I_{w1} = 10 \times 10^{-3} \text{kg.m}^2, I_{w2} = 6 \times 10^{-3} \text{kg.m}^2,$ $I_{w3} = 4 \times 10^{-3} \text{kg.m}^2, T_{ci} \leq 0.4 \text{N.m}, i = x, y, z$
مشخصات اغتشاش گرادیان جاذبه	$\mu = 398600 \frac{\text{km}^3}{\text{s}^2}, r_c = 6931.1\text{km}$
مشخصات اغتشاش آیرودینامیکی	$r_{ms} = (0.5 \quad 0.5 \quad 0.5)^T \text{m},$ $\rho = 3.58 \times 10^{-12} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3},$ $C_D = 1.2, A_S = 1\text{m}^2$
مشخصات اغتشاش مغناطیسی	$m_r = (0.1 \quad 0.1 \quad 0.1)^T \text{Am}^2$
مدل ریاضی میدان مغناطیسی زمین	$IGRF13$

جدول (۲): پارامترهای شبیه‌سازی

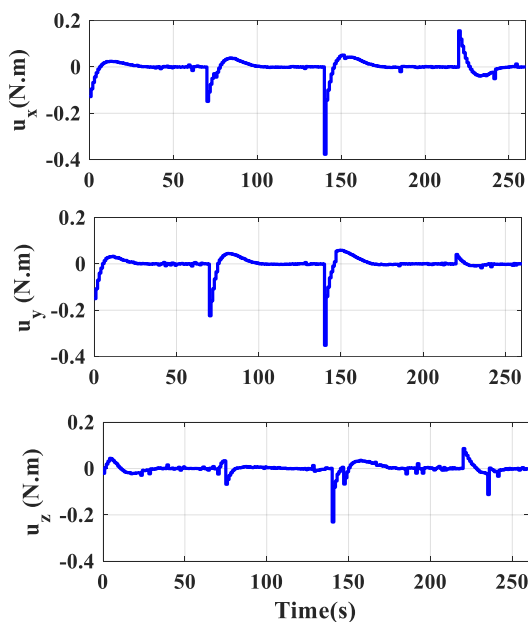
پارامتر	مقدار
پارامترهای سیگنال کلیدزنی	$\alpha = 120\text{s}$
پارامترهای مشترک	$a_s = -0.1, \varepsilon = 1.5$
پارامترهای اغتشاش	$\gamma = 10^3, f_{\max} = 10^{-5}$
گام زمانی	$T_s = 1\text{s}$
پارامترهای تابع هزینه	$P_{di} = C, Q_{di} = I$

اکنون با توجه به نقطه کاری هر زیرفضا، مدل خطی زمان گسسته آن استخراج شده است. حال با در نظر گرفتن چند مانور تغییر وضعیت ماهواره، عملکرد طرح کنترل پیشنهادی با وجود اغتشاشات مختلف و نویز حسگرها مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. در اینجا فرض می‌شود که یک نویز با میانگین صفر و انحراف معیار 0.1 درجه روی حسگرهای زاویه و یک نویز با میانگین صفر و انحراف معیار 0.05 درجه بر ثانیه روی حسگرهای سرعت زاویه‌ای وجود دارد.

۱۰ سرعت‌های زاویه‌ای بدنه ماهواره را نشان می‌دهد. این شکل نشان می‌دهد که سرعت زاویه‌ای در هر سه محور در پایان هر مانور به کمتر از $0.1^\circ/s$ درجه بر ثانیه می‌رسد که نشان از مقدار قابل قبول لرزش‌های ماهواره است.

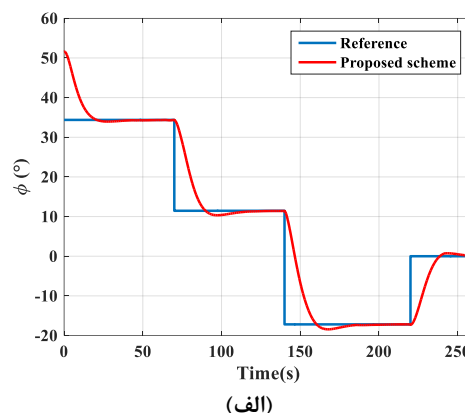


شکل (۱۰): سرعت‌های زاویه‌ای بدنه ماهواره

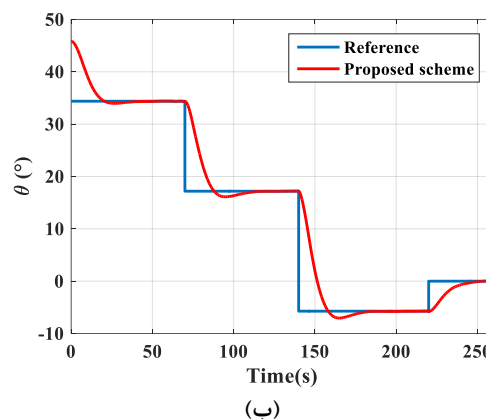


شکل (۱۱): ورودی کنترلی اعمال شده به بدنه ماهواره

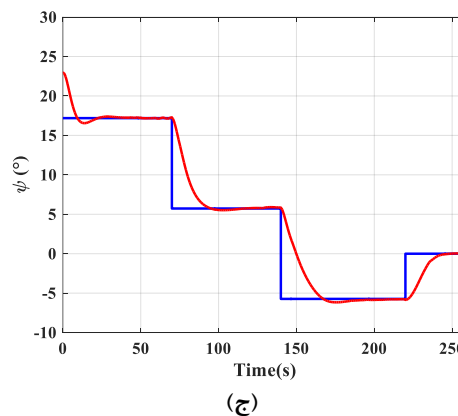
مرتبه صفر عبور می‌کند و بر اساس آن، گشتاور لازم توسط چرخ عکس‌العملی تولید شده و به بدنه ماهواره اعمال می‌شود.



(الف)



(ب)



(ج)

شکل (۹): ردیابی زوایای مطلوب در طول انجام چند مانور

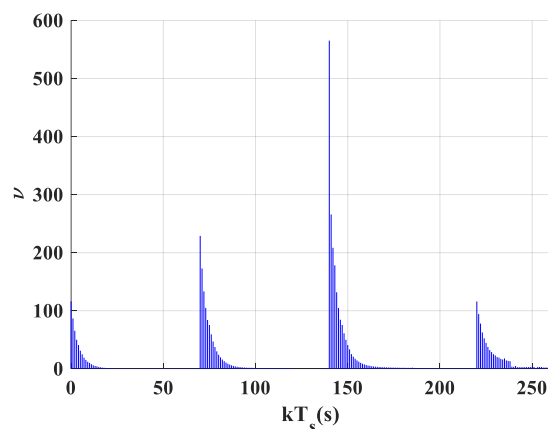
شکل ۹ نتایج حاصل از ردیابی زوایای مطلوب در طول انجام هر کدام از مانورها را نشان می‌دهد. مطابق با این شکل‌ها در پایان هر مانور، خطای ردیابی هر کدام از زوایای رول، پیچ و یابو به کمتر از 0.1° درجه می‌رسد که دقت قابل قبولی است. همچنین، شکل

شکل (۱۲): مسیر حالت‌های سیستم و سیگنال کلیدزنی تولیدشده

توسط آن

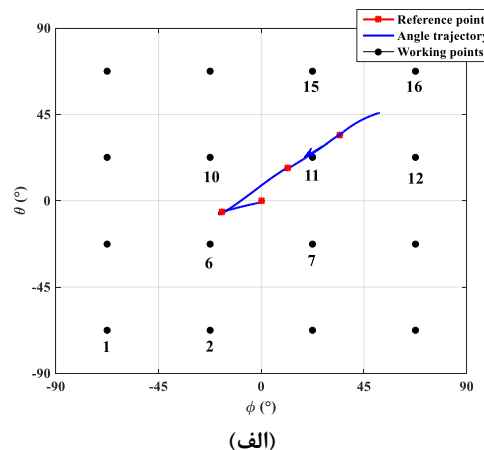
شکل ۱۳ روند تغییرات تابع لیاپانوف را نشان می‌دهد. با توجه به این شکل، در هر مانور، روند کلی تغییرات تابع لیاپانوف کاهشی است. بنابراین، طراحی همزمان سیگنال کلیدزنی و کنترل‌کننده پیش‌بین مدل، پایداری مجانبی یکنواخت سیستم حلقه بسته را تضمین می‌کند. همچنین، این شکل نشان می‌دهد که نرخ کاهش انرژی در زیر فضاها بیشتر از $|a_s| = 0.1$ در هر زمان نمونه‌برداری است. همچنین، ضریب افزایش آنی تابع لیاپانوف در لحظات انتقال بین زیرفضاها کمتر از $\varepsilon = 1.5$ است. بنابراین، محدودیت‌های تابع لیاپانوف چنگانه برآورده شده است.

شکل ۱۴ روند تغییرات حد بالای تابع هزینه را نشان می‌دهد. با توجه به اینکه تابع لیاپانوف در نهایت به سمت صفر همگرا می‌شود، حد بالای تابع هزینه طبق رابطه (پ-۱) به سمت $\gamma^2 f_{max} = 10$ همگرا می‌شود. در واقع وجود اغتشاشات باعث می‌شود که حد بالای تابع هزینه از مقدار ۱۰ پایین‌تر نیاید. به بیان دیگر، پارامترهای اغتشاش شامل γ و f_{max} باعث ایجاد محدودیت روی حداقل حد بالای تابع هزینه می‌شود.

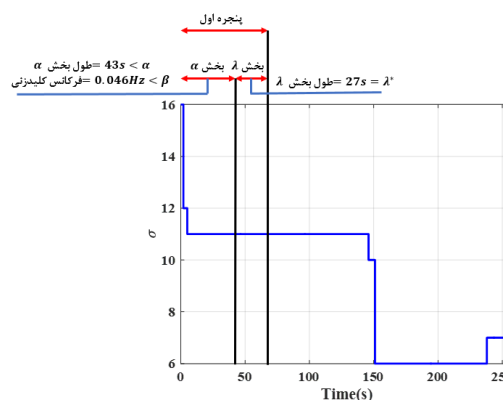


شکل (۱۳): روند تغییرات تابع لیاپانوف

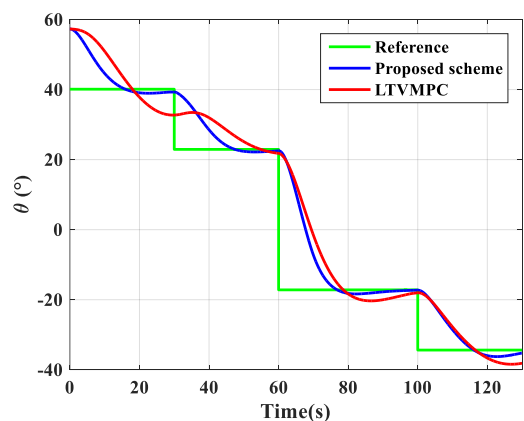
شکل ۱۱ ورودی‌های کنترلی (گشتاور تولیدی) اعمال شده به دینامیک وضعیت ماهواره را نشان می‌دهد که بین محدوده -0.4 تا 0.4 تغییر می‌کنند. بنابراین، محدودیت اشباع چرخ‌های عکس‌العملی ارضا می‌شود. همچنین، در شروع هر مانور، ورودی کنترلی افزایش ناگهانی دارند ولی در نهایت به سمت صفر همگرا می‌شود. شکل ۱۲ مسیر حالت‌های سیستم و سیگنال کلیدزنی تولیدی توسط آن را نشان می‌دهد. از شکل ۱۲(آ) استنباط می‌شود که در طول چند مانور، چندین انتقال حالت بین زیرفضاها (چندین کلیدزنی) اتفاق می‌افتد و در نتیجه منجر به یک سیگنال کلیدزنی می‌شود که در شکل ۱۲(ب) نشان داده شده است. از شکل ۱۲(ب) می‌توان استنباط کرد که همه پنجره‌ها محدوده در نظر گرفته شده برای پارامترهای α ، β و λ^* را برآورده کرده‌اند. برای مثال، در پنجره اول، طول بخش λ برابر ۲۷ ثانیه است که دقیقاً برابر $\lambda^* = 27s$ است. همچنین، طول بخش کلیدزنی‌ها برابر ۴۳ ثانیه است که کمتر از $\alpha = 120s$ است و فرکانس کلیدزنی برابر $0.046/0$ هرتز است که کمتر از $\beta = 0.05Hz$ است.



(الف)

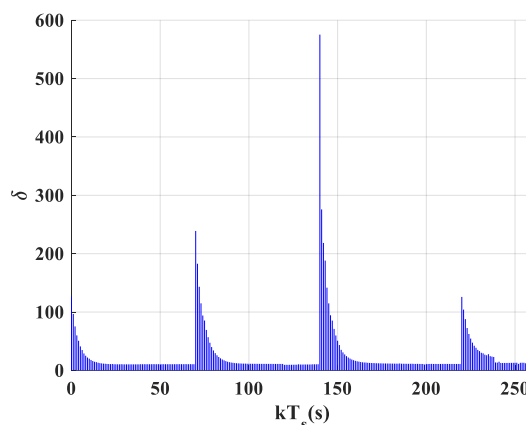


(ب)



(ب)

شکل (۱۵): مقایسه طرح پیشنهادی و طرح کنترل پیش‌بین مدل متغیر با زمان خطی



شکل ۱۴- روند تغییرات حد بالای تابع هزینه

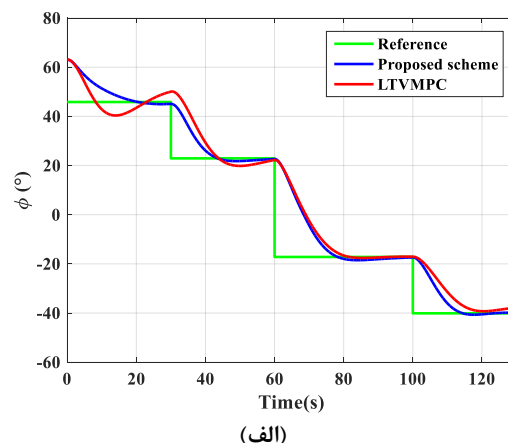
۶- نتیجه‌گیری

در این پژوهش، ابتدا دینامیک وضعیت غیرخطی ماهواره تجهیز شده، با عملگرهای چرخ عکس‌العملی بر اساس نقاط کاری مختلف به چند زیردینامیک خطی شکسته شد و یک دینامیک کلیدزنی شکل گرفت. بنابراین به دلیل ماهیت سیستم‌های کلیدزنی، امکان انجام مانورهای سریع قابل پوشش است. همچنین، با تخصیص دادن یک قانون کنترلی برای هر زیردینامیک هم امکان ردیابی در یک محدوده وسیع نقاط کاری فراهم شد و هم دقت و سرعت نشانه‌روی افزایش یافت. سپس، یک طرح همزمان کنترل وضعیت بر اساس رویکرد پیش‌بین مدل کلیدزنی H_{∞}/H_2 و سیگنال کلیدزنی از طریق تابع لیاپانوف چندگانه توسعه یافت تا هم امکان انجام مانورهای سریع‌تر در یک محدوده وسیع فراهم شود و هم با اثر اغتشاشات و محدودیت‌های اشباع چرخ‌های عکس‌العملی مقابله شود. در نهایت، عملکرد طرح پیشنهادی روی یک ماهواره نمونه از طریق شبیه‌سازی نشان داده شد.

پیوست ۱.

اثبات مطابق مراحل زیر انجام می‌شود:

- قید تابع هزینه (۳۹): این قید بهینه بودن ورودی کنترل و به حداقل رساندن تابع هزینه (۳۵) را تضمین می‌کند. برای این منظور، شرط پایداری لیاپانوف در افق پیش‌بین در زیرسیستم i به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:



(الف)

رابطه (پ-۱) به صورت زیر به فرم ماتریسی بازنویسی می‌گردد:

$$\begin{pmatrix} E(\sigma_\omega) \\ f(\sigma_\omega) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -\bar{A}_{di,k}^T R_{i,k} \bar{A}_{di,k} + R_{i,k} & -\bar{A}_{di,k}^T R_{i,k} F_{di} \\ -P_{di}^T P_{di} - G_{i,k}^T Q_{di} & -F_{di}^T R_{i,k} F_{di} + \gamma^2 I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E(\sigma_\omega) \\ f(\sigma_\omega) \end{pmatrix} \geq 0 \quad (\text{پ-۱})$$

واضح است که اگر (۴۰) برقرار باشد، آنگاه (پ-۱) نیز برقرار خواهد بود.

- قید تابع لیپانوف در لحظات کلیدزنی (۴۱): این قید از افزایش دلخواه توابع لیپانوف در لحظه‌های کلیدزنی جلوگیری می‌کند و در لحظه شروع زیرسیستم‌ها به صورت زیر توسعه می‌یابد:

$$\begin{aligned} v_{i,k}(E(k)) &\leq \varepsilon v_{j,k-1}(E(k)) \Rightarrow E(k)^T \\ R_{i,k} E(k) &\leq \varepsilon E(k)^T R_{j,k-1} E(k) \\ \Rightarrow E(k)^T (\varepsilon R_{j,k-1} - R_{i,k}) E(k) &\geq 0 \end{aligned} \quad (\text{پ-۱})$$

بنابراین، رابطه (۴۱) استخراج می‌شود.

- قید ورودی (۴۲): این قید تضمین می‌کند که مسئله بهینه‌سازی با فرض اشباع عملگرها حل می‌شود. با جمع کردن دو طرف رابطه (پ-۱) از $\omega=0$ تا $\omega=m$ و ساده‌سازی، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} E(\sigma_{m+1})^T R_{i,k} E(\sigma_{m+1}) &\leq E(\sigma_0)^T \\ R_{i,k} E(\sigma_0) + \gamma^2 f_{\max} & \\ \Rightarrow E(\sigma_{m+1})^T R_{i,k} E(\sigma_{m+1}) &\leq \delta_{i,k} \end{aligned} \quad (\text{پ-۱-۱})$$

بردار V^e را به عنوان بردار پایه e -ام کانونیکال R^{n_u} بردار $V^e = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ در نظر بگیرید. با استفاده از (۳۶)، (۳۷) و (پ-۱-۱)، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} |u_{i,k}^e(\sigma_\omega)|^2 &= |(G_{i,k} E(\sigma_\omega))_e|^2 = \\ |(G_{i,k} R_{i,k}^{-0.5} R_{i,k}^{0.5} E(\sigma_\omega))_e|^2 &\leq \\ \delta_{i,k} |(G_{i,k} R_{i,k}^{-0.5})_e|^2 &= \delta_{i,k} V^{eT} G_{i,k} \\ R_{i,k}^{-1} G_{i,k}^T V^e &\leq u_{e,\max}^2 \end{aligned} \quad (\text{پ-۱-۱})$$

بنابراین، به کمک مکمل شور [۲۲]، (۴۲) تایید می‌شود.

- شرایط پایداری در افق زمانی واقعی (بدون پیش‌بینی): پیش از این، شرط پایداری (پ-۱) در افق زمانی پیش‌بینی اثبات شده بود. در اینجا لازم است این شرایط در افق زمانی واقعی برای طراحی سیگنال کلیدزنی و تضمین عملکرد H^∞ بررسی شود. فرض کنید

$$\begin{aligned} v_{i,k}(k+\omega+1|k) - v_{i,k}(k+\omega|k) &\leq a_s v_{i,k}(k+\omega|k) \\ -o(k+\omega|k)^T o(k+\omega|k) + \gamma^2 f(k+\omega|k)^T & \\ f(k+\omega|k) & \end{aligned} \quad (\text{پ-۱})$$

که:

$$v_{i,k}(k+\omega|k) = E(k+\omega|k)^T R_{i,k} E(k+\omega|k) \quad (\text{پ-۱-۲})$$

با جمع کردن دو طرف رابطه (پ-۱) از $\omega=0$ تا $\omega=\infty$ و تعریف $\sigma_\omega = k+\omega|k$ و $\sigma_{\omega+1} = k+\omega+1|k$ ، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \sum_{\omega=0}^{\infty} [v_{i,k}(\sigma_{\omega+1}) - v_{i,k}(\sigma_\omega)] &\leq a_s \sum_{\omega=0}^{\infty} v_{i,k}(\sigma_\omega) \\ - \sum_{\omega=0}^{\infty} o(\sigma_\omega)^T o(\sigma_\omega) + \gamma^2 \sum_{\omega=0}^{\infty} f(\sigma_\omega)^T f(\sigma_\omega) & \end{aligned} \quad (\text{پ-۱-۳})$$

با توجه به $a_s < 0$ ، $v_{i,k} > 0$ و روابط (۳۲) و (۳۴)، ناساوی زیر را میتوان به دست آورد:

$$J_{s,k} \leq E^T(k|k) R_{i,k} E(k|k) + \gamma^2 f_{\max} \quad (\text{پ-۱-۴})$$

اگر حد بالای تابع هزینه با نماد $\delta_{i,k}$ نشان داده شود، آنگاه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} E^T(k|k) R_{i,k} E(k|k) + \gamma^2 f_{\max} &\leq \delta_{i,k} \Rightarrow \delta_{i,k} \\ - \left(X(k|k) \right)^T \begin{pmatrix} R_{i,k}^{-1} & 0 \\ 0 & \gamma^2 f_{\max} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} X(k|k) \\ \gamma^2 f_{\max} \end{pmatrix} &\geq 0 \end{aligned} \quad (\text{پ-۱-۵})$$

با استفاده از لم مکمل شور [۲۲] میتوان نتیجه گرفت که ناساوی (پ-۱-۵) معادل ناساوی (۳۹) است.

- قید شرط پایداری (۴۰): در اینجا، قید (۴۰) به گونه‌ای استخراج می‌شود که تضمین‌کننده نرخ تغییرات انرژی در زیرسیستم‌ها بر اساس شرط پایداری در افق پیش‌بین (پ-۱) باشد. با توسعه تغییر تابع کاندید لیپانوف (پ-۱-۲) در امتداد مسیر حالت‌های سیستم حلقه بسته در زیر سیستم‌ها، رابطه زیر استخراج می‌شود:

$$\begin{aligned} \Delta v &= v_{i,k}(\sigma_{\omega+1}) - v_{i,k}(\sigma_\omega) = (\bar{A}_{di,k} E(\sigma_\omega) \\ &+ F_{di} f(\sigma_\omega))^T R_{i,k} (\bar{A}_{di,k} E(\sigma_\omega) + F_{di} f(\sigma_\omega)) \\ &- E^T(\sigma_\omega) R_{i,k} E(\sigma_\omega) \end{aligned} \quad (\text{پ-۱-۶})$$

با ترکیب روابط (پ-۱) و (پ-۱-۶)، شرط پایداری در افق

پیش‌بین در زیرسیستم‌ها به صورت زیر توسعه می‌یابد:

$$\begin{aligned} E(\sigma_\omega)^T \bar{A}_{di,k}^T R_{i,k} \bar{A}_{di,k} E(\sigma_\omega) + f(\sigma_\omega)^T & \\ F_{di}^T R_{i,k} F_{di} f(\sigma_\omega) + X(\sigma_\omega)^T \bar{A}_{di,k}^T R_{i,k} F_{di} & \\ f(\sigma_\omega) + f(\sigma_\omega)^T F_{di}^T R_{i,k} \bar{A}_{di,k} E(\sigma_\omega) & \\ - E(\sigma_\omega)^T R_{i,k} E(\sigma_\omega) + E(\sigma_\omega)^T P_{di}^T P_{di} & \\ E(\sigma_\omega) + E(\sigma_\omega)^T G_{i,k}^T Q_{di}^T Q_{di} G_{i,k} E(\sigma_\omega) & \\ - \gamma^2 f^T(\sigma_\omega) f(\sigma_\omega) - a_s E(\sigma_\omega)^T & \\ R_{i,k} E(\sigma_\omega) &\leq 0 \end{aligned} \quad (\text{پ-۱-۷})$$

$$\begin{aligned} v_n(E(k_{s_{p+1}})) &\leq \varepsilon v_{\sigma(k_{s_{p+1}-1})}(E(k_{s_{p+1}})), \\ v_{\sigma(k_{s_{p+1}-1})}(E(k_{s_{p+1}})) &\leq (1+a_s) v_{\sigma(k_{s_{p+1}-1})}(E(k_{s_{p+1}}-1)) \\ &\Rightarrow v_n(E(k_{s_{p+1}}-1)) \leq \varepsilon(1+a_s) v_{\sigma(k_{s_{p+1}-1})}(E(k_{s_{p+1}}-1)) \end{aligned} \quad (پ ۱۷-۱)$$

به همین ترتیب، رابطه بین توابع لیاپانوف در یک زیرسیستم در پنجره p به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} v_n(E(k_{s_{p+1}})) &\leq \varepsilon(1+a_s)^{k_{s_{p+1}}-k_{s_{p+1}-1}} v_{\sigma(k_{s_{p+1}-1})}(E(k_{s_{p+1}-1})) \end{aligned} \quad (پ ۱۸-۱)$$

بر اساس تعریف ۱ و با استفاده از روابط (۳۳) و (پ ۱۸-۱)، رابطه بین توابع لیاپانوف در کل بازه زمانی پنجره p به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} v_n(E(k_{s_{p+1}})) &\leq \varepsilon^{N(k_{s_{p+1}}, k_{s_{p+1}})} (1+a_s)^{k_{s_{p+1}}-k_{s_{p+1}}} v_{\sigma(k_{s_{p+1}-1})}(E(k_{s_{p+1}-1})) \\ &\leq \varepsilon^{N(k_{s_{p+1}}, k_{s_{p+1}})+1} (1+a_s)^{k_{s_{p+1}}-k_{s_{p+1}}} v_m(E(k_{s_p})) \\ &\Rightarrow v_n(E(k_{s_{p+1}})) \leq \varepsilon^{\alpha\beta+1} (1+a_s)^\lambda v_m(E(k_{s_p})) \\ &\Rightarrow v_n(E(k_{s_{p+1}})) \leq e^{(\alpha\beta+1)\ln\varepsilon + \lambda\ln(1+a_s)} v_m(E(k_{s_p})) \end{aligned} \quad (پ ۱۹-۱)$$

برای اینکه تابع لیاپانوف در پنجره p کاهش‌ی باشد، باید ناتساوی زیر برقرار باشد:

$$\begin{aligned} \kappa &= e^{(\alpha\beta+1)\ln\varepsilon + \lambda\ln(1+a_s)} < 1 \\ \Rightarrow \lambda &> \lambda^* = \frac{(\alpha\beta+1)\ln\varepsilon}{-\ln(1+a_s)} \end{aligned} \quad (پ ۲۰-۱)$$

حال، اگر بازه زمانی از p پنجره تشکیل شده باشد، تغییر تابع لیاپانوف به صورت زیر خواهد بود:

$$v_n(E(k_{s_{p+1}})) \leq \kappa^p v_{\sigma(k_{s_1})}(E(k_{s_1})) \quad (پ ۲۱-۱)$$

با فرض $k_{s_1}=k_0$ و $k \in [k_{s_{p+1}}, k_{s_{p+2}}]$ و با استفاده از روابط (پ ۹-۱)، (پ ۱۵-۱) و (پ ۲۱-۱)، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} v_{\sigma(k)}(E(k)) &\leq \varepsilon^{\alpha\beta+1} \kappa^p v_{\sigma(k_0)}(E(k_0)) \\ &\Rightarrow \|E(k)\| \leq \kappa_1^{-1} (\varepsilon^{\alpha\beta+1} \kappa^p \kappa_2 (\|E(k_0)\|)) \\ &\Rightarrow \|E(k)\| \leq \kappa_3 (\|E(k_0)\|) \end{aligned} \quad (پ ۲۲-۱)$$

$$\kappa_1 = \lambda_{\min}(R_{\sigma(k)}) \|E(k)\|^2$$

$\kappa_2 = \lambda_{\max}(R_{\sigma(k_0)}) \|E(k_0)\|^2$ به دست می‌آید. بنابراین، شرط اول تعریف ۲ برقرار خواهد بود. در ادامه با تعریف $\Omega(k) = o(k)^T o(k) - \gamma^2 f(k)^T f(k)$ و مشابیه روند قبل، اثبات می‌شود که رابطه توابع لیاپانوف بین بازه $k_{s_1}=k_0$ و $k \in [k_{s_{p+1}}, k_{s_{p+2}}]$ به صورت زیر خواهد بود:

که پاسخ‌های بهینه در مراحل k و $k+1$ در زیر سیستم i با $(\delta_{i,k}, R_{i,k})$ نشان داده شود. با قرار دادن $m=0$ در (پ ۱۰-۱)، خواهیم داشت:

$$v_{i,k}(\sigma_1) = E(\sigma_1)^T R_{i,k} E(\sigma_1) \leq \delta_{i,k} \quad (پ ۱۲-۱)$$

همچنین، با توجه به (پ ۱-۵) و تعریف $\tau_1 = k+1|k+1$ ، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} v_{i,k}(\tau_1) &= E(\tau_1)^T R_{i,k+1} E(\tau_1) \\ E(\tau_1) &\leq \delta_{i,k+1} - \gamma^2 f_{\max}^2 \end{aligned} \quad (پ ۱۳-۱)$$

با توجه به (پ ۱۲-۱) و (پ ۱۳-۱)، استنتاج می‌شود که اگر $(\delta_{i,k}, R_{i,k})$ یک پاسخ مسئله بهینه‌سازی در مرحله $k+1$ باشد، آنگاه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} v_{i,k}(\sigma_1) &= E(\sigma_1)^T R_{i,k} E(\sigma_1) \\ &\leq \delta_{i,k} - \gamma^2 f_{\max}^2 \end{aligned} \quad (پ ۱۴-۱)$$

در نتیجه، $(\delta_{i,k}, R_{i,k})$ یک پاسخ غیربهینه و $(\delta_{i,k+1}, R_{i,k+1})$ یک پاسخ بهینه مسئله بهینه‌سازی در مرحله $k+1$ است ($\delta_{i,k+1} \leq \delta_{i,k}$). بنابراین، رابطه زیر استخراج می‌شود:

$$\begin{aligned} v_{i,k+1}(k+1|k+1) &\leq v_{i,k}(k+1|k) \\ &\Rightarrow v_{i,k+1}(k+1|k+1) \leq (1+a_s) v_{i,k}(k|k) - o(k|k)^T o(k|k) \\ &\quad + \gamma^2 f(k|k)^T f(k|k) \Rightarrow v_i(E(k+1)) \leq (1+a_s) v_i(E(k)) \\ &\quad - o(k)^T o(k) + \gamma^2 f(k)^T f(k) \end{aligned} \quad (پ ۱۵-۱)$$

از سوی دیگر، اگر $(\delta_{i,k}, R_{i,k})$ یک پاسخ مسئله بهینه‌سازی در مرحله $k+1$ نباشد، آنگاه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} v_{i,k}(k+1|k) &= E(k+1|k)^T R_{i,k} E(k+1|k) \\ &\leq \delta'_{i,k} - \gamma^2 f_{\max}^2 \quad (\delta'_{i,k} < \delta_{i,k}) \end{aligned} \quad (پ ۱۶-۱)$$

بنابراین، $(\delta'_{i,k}, R_{i,k})$ یک پاسخ غیر بهینه و $(\delta_{i,k+1}, R_{i,k+1})$ یک پاسخ بهینه مسئله بهینه‌سازی در مرحله $k+1$ است ($\delta'_{i,k+1} \leq \delta'_{i,k}$). بر این اساس، رابطه (پ ۱۵-۱) دوباره تایید می‌شود. مشاهده می‌شود که (پ ۱۵-۱) شرط پایداری در افق زمانی واقعی را تایید می‌کنند.

- طراحی سیگنال کلیدزنی و تضمین عملکرد H^∞ : با تعریف $\sigma(k_{s_p})=m$ ، $\sigma(k_{s_{p+1}})=n$ و با استفاده از روابط (پ ۹-۱) و (پ ۱۵-۱)، رابطه بین توابع لیاپانوف در دو مرحله متوالی در پنجره p با فرض $f(k) \equiv 0$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \sum_{R=k_0}^k (1+a_s)^{k-R} \mathbf{o}(R)^T \mathbf{o}(R) \leq \gamma^2 \eta \sum_{k=k_0}^{\infty} \sum_{R=k_0}^k [\rho^{k-L} \mathbf{f}(R)^T \mathbf{f}(R)] \Rightarrow \sum_{R=k_0}^{\infty} \sum_{k=R}^{\infty} [(1+a_s)^{k-R} \mathbf{o}(R)^T \mathbf{o}(L)] \leq \gamma^2 \eta \sum_{R=k_0}^{\infty} \sum_{k=R}^{\infty} [\rho^{k-R} \mathbf{f}(R)^T \mathbf{f}(R)] \quad (\text{پ ۱-۲۹})$$

$$\rho_{1+a_s}^{<1} \Rightarrow \sum_{R=k_0}^{\infty} \mathbf{o}(R)^T \mathbf{o}(R) \leq \frac{-a_s \gamma^2 \eta}{1-\rho} \sum_{R=k_0}^{\infty} \mathbf{f}(R)^T \mathbf{f}(R)$$

بنابراین، شرط دوم تعریف ۲ با سطح حذف اغتشاش (۴۵) تأیید می‌شود. از طرف دیگر، رابطه (پ ۱-۲۰) و فرض $\lambda\beta > 1$ ، رابطه (۴۴) را تأیید می‌کنند. در نتیجه، اثبات قضیه ۱ تکمیل می‌شود. پیوست ۲.

اثبات به صورت زیر انجام می‌شود:

تغییر متغیرهای $\mathbf{K}_{i,k} = \delta_{i,k} \mathbf{U}_{i,k}$ و $\mathbf{U}_{i,k} = \mathbf{R}_{i,k}^{-1}$ را در نظر بگیرید. قید (۴۷) را میتوان با ضرب کردن (۳۹) در $\delta_{i,k}^{-1}$ و با استفاده از مکمل شور [۲۲] به دست آورد. همچنین ناتساوی (۴۰) به صورت زیر توسعه می‌یابد:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{R}_{s,i,k} - \mathbf{P}_{di}^T \mathbf{P}_{di} - \mathbf{G}_{i,k}^T \mathbf{Q}_{di}^T \mathbf{Q}_{di} \mathbf{G}_{i,k} & 0 \\ +a_s \mathbf{R}_{i,k} & \gamma^2 \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{matrix} * \\ * \end{matrix} \geq 0 \quad (\text{پ ۲-۱})$$

$$- \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{di,k}^T \\ \mathbf{F}_{di}^T \end{pmatrix} (\mathbf{R}_{i,k}) (\bar{\mathbf{A}}_{di,k} \quad \mathbf{F}_{di}) \geq 0$$

با استفاده از لم مکمل شور [۲۲]، رابطه (پ ۲-۱) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{R}_{i,k} - \mathbf{P}_{di}^T \mathbf{P}_{di} - \mathbf{G}_{i,k}^T \mathbf{Q}_{di}^T \mathbf{Q}_{di} \mathbf{G}_{i,k} & 0 & \bar{\mathbf{A}}_{di,k}^T \\ \mathbf{Q}_{di}^T \mathbf{G}_{i,k} + a_s \mathbf{R}_{i,k} & \gamma^2 \mathbf{I} & \mathbf{F}_{di}^T \\ * & * & \mathbf{R}_{i,k}^{-1} \end{pmatrix} \geq 0 \quad (\text{پ ۲-۲})$$

با ضرب ناتساوی فوق در $\frac{1}{\delta_{i,k}^2} \text{bdiag}(\mathbf{Z}_{i,k}^T, \mathbf{I}, \mathbf{I})$ و $\mathbf{K}_{i,k} = \delta_{i,k} \mathbf{U}_{i,k}$ ، $\mathbf{U}_{i,k} = \mathbf{R}_{i,k}^{-1}$ و با فرض $\frac{1}{\delta_{i,k}^2} \text{bdiag}(\mathbf{Z}_{i,k}, \mathbf{I}, \mathbf{I})$ ، $\mathbf{N}_{i,k} = \delta_{i,k} \mathbf{Z}_{i,k}$ ، $\mathbf{M}_{i,k} = \mathbf{G}_{i,k} \mathbf{N}_{i,k}$ و $\mathbf{N}_{i,k} = \delta_{i,k} \mathbf{Z}_{i,k}$ ، ناتساوی زیر با استفاده از لم مکمل شور [۲۲] به دست می‌آید:

$$v_{\sigma(k)}(\mathbf{E}(k)) \leq \varepsilon^{\alpha\beta+1} \kappa^p v_{\sigma(k_0)}(\mathbf{E}(k_0)) - \sum_{R=k_0}^k \varepsilon^{N(R,k)} (1+a_s)^{k-R} \Omega(L) \quad (\text{پ ۱-۲۳})$$

با صفر قرار دادن شرایط اولیه در رابطه (پ ۱-۲۳) و با توجه به $V_{\sigma(k)} > 0$ ، شرط زیر باید برقرار باشد:

$$\sum_{R=k_0}^k \varepsilon^{N(R,k)} (1+a_s)^{k-R} \Omega(R) \leq 0 \quad (\text{پ ۱-۲۴})$$

(پ ۱-۲۴) به صورت زیر گسترش می‌یابد:

$$\sum_{R=k_0}^k [\varepsilon^{N(R,k)} (1+a_s)^{k-R} \mathbf{o}(R)^T \mathbf{o}(R)] \leq \gamma^2 \sum_{R=k_0}^k [\varepsilon^{N(R,k)} (1+a_s)^{k-R} \mathbf{f}(R)^T \mathbf{f}(R)] \quad (\text{پ ۱-۲۵})$$

مجموع زمان اجرا در پنجره p برابر با $\lambda_p + \alpha_p$ است که در آن λ_p و α_p به ترتیب زمان اجرا در قسمت λ و قسمت α است. از آنجایی که $\alpha_p \leq \alpha$ و $\lambda_p \geq \lambda$ و با فرض $\lambda\beta > 1$ ، به راحتی میتوان استنباط کرد که $(\lambda\beta - 1)(\alpha_p - \alpha) \leq 0$.

گرفتن بازه $[L, k]$ در پنجره p-ام، خواهیم داشت:

$$\left(\frac{k-R}{\lambda_p + \alpha_p} + 1\right)(\alpha\beta + 1) \leq \left(\frac{k-R}{\lambda + \alpha} + 1\right)(\alpha\beta + 1) \quad (\text{پ ۱-۲۶})$$

رابطه (پ ۱-۲۶) برای پنجره‌های دیگر نیز صادق است. در نتیجه، با جمع‌بندی پنجره‌ها در بازه $[R, k]$ ، میتوان رابطه زیر را به دست آورد:

$$N(R, k) \leq \left(\frac{k-R}{\lambda + \alpha} + 1\right)(\alpha\beta + 1) \quad (\text{پ ۱-۲۷})$$

با قرار دادن (پ ۱-۲۷) در (پ ۱-۲۵)، خواهیم داشت:

$$\sum_{R=k_0}^k [(1+a_s)^{k-R} \mathbf{o}(R)^T \mathbf{o}(R)] \leq \gamma^2 \varepsilon^{(\alpha\beta+1)} \sum_{R=k_0}^k [(\varepsilon^{\frac{\alpha\beta+1}{\alpha+\lambda}} (1+a_s))^{k-R} \mathbf{f}(R)^T \mathbf{f}(R)] \quad (\text{پ ۱-۲۸})$$

$$\Rightarrow \sum_{R=k_0}^k (1+a_s)^{k-R} \mathbf{o}(R)^T \mathbf{o}(R) \leq \gamma^2 \eta \sum_{R=k_0}^k \rho^{k-R} \mathbf{f}(R)^T \mathbf{f}(R)$$

با جمع کردن دو طرف رابطه (پ ۱-۲۸) از $k = k_0$ تا $k \rightarrow \infty$ ، خواهیم داشت:

مراجع

- [1] F. Landis Markley, John L. Crassidis, *Fundamental of spacecraft attitude determination and control*, Springer, 2014.
- [2] J. R. Wertz, *Spacecraft attitude determination and control*, Springer, 1978.
- [3] J. R. Wertz, J. J. Puschell, D. F. Everett, *Space mission engineering: The new SMAD*, 1st ed., Microcosm Press, 2011.
- [4] Z. Sun, and S. S. Ge, *Stability Theory of Switched Dynamical Systems*, Springer, 2011.
- [5] Z. Sun, and S. S. Ge, *Switched Linear Systems*, Springer, 2005.
- [6] M. Benallouch, G. Schutz, D. Fiorelli and M. Boutayeb, "H ∞ model predictive control for discrete-time switched linear systems with application to drinking water supply network," *Journal of Process Control*, vol. 24, no. 6, pp. 924-938, 2014.
- [7] F. Bayat, "Model predictive sliding control for finite-time three-axis spacecraft attitude tracking," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 66, no. 10, pp. 7986-7996, 2018.
- [8] L. Franchi, L. Feruglio, R. Mozzillo, and S. Corfino, "Model predictive and reallocation problem for CubeSat fault recovery and attitude control," *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 98, pp. 1034-1055, 2018.
- [9] M. Mammarella, D. Y. Lee, H. Park, E. Capello, M. Dentis, and G. Guglieri, "Attitude control of a small spacecraft via tube-based model predictive control," *Journal of Spacecraft and Rockets*, vol. 56, no. 6, pp. 1662-1679, 2019.
- a. Golzari, H. N. Pishkenari, H. Salarieh, and T. Abdollahi, "Quaternion based linear time-varying model predictive attitude control for satellites with two reaction wheels," *Aerospace Science and Technology*, vol. 98, pp. 105677, 2020.
- [10] J. Mamrasulov, J. Holaza, and M. Gulan, "Design of an mpc based attitude control system for a cubesat nanosatellite," *23rd International Conference on Process Control*, pp. 266-271, 2021.
- [11] X. Cao, D. Gong, Q. Shen, and S. Wu, "Fault-Tolerant Attitude Control of Spacecraft via Explicit Model Prediction Method," *International Conference on Aerospace System Science and Engineering*. Singapore: Springer Nature Singapore, pp. 147-161, 2021.
- [12] E. Hill, S.A. Gadsden, and M. Biglarbegan, "Explicit nonlinear MPC for fault tolerance using interacting multiple models," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 57, no. 5, pp. 2784-2794, 2021.
- [13] M. Esit, H. E. Soken, and C. Hajiye, "A Model Predictive Control Based Magnetorquer-only Attitude Control Approach for a Small Satellite," *IFAC-PapersOnLine*, vol. 55, no. 22, pp. 79-84, 2022.
- [14] P. H. dos Santos, and R. A. J. Chagas, "Satellite attitude control using extended model predictive control (EMPC) under actuator failures," *Advances in Space Research*, 2024.

$$\begin{pmatrix} (1+a_s)N_{i,k}^T K_{i,k}^{-1} N_{i,k} & N_{i,k}^T P_{di}^T & M_{i,k}^T Q_{di}^T \\ * & \delta_{i,k} I & 0 \\ * & * & \delta_{i,k} I \\ * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & (A_{di}N_{i,k} + B_{di}M_{i,k})^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \delta_{i,k} \gamma^2 I & \delta_{i,k} F_{di}^T & K_{i,k} \end{pmatrix} \geq 0 \quad (\text{پ ۳-۲})$$

که در آن $N_{i,k}^T K_{i,k}^{-1} N_{i,k}$ و $K_{i,k}$ باید مثبت معین باشد تا پاسخ داشته باشد. بنابراین، $N_{i,k}$ رتبه کامل است [۶]. با توسعه $(K_{i,k} - N_{i,k})^T K_{i,k}^{-1} (K_{i,k} - N_{i,k}) \geq 0$ خواهیم داشت: $N_{i,k}^T K_{i,k}^{-1} N_{i,k} \geq N_{i,k} + N_{i,k}^T - K_{i,k}$ [۶]. بنابراین، اگر قید (۴۸) برقرار باشد، آنگاه (پ ۳-۲) برقرار است. در ادامه، با اعمال تغییر متغیرها، ناتساوی (۴۱) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\delta_{i,k}^{-1} \varepsilon v_{j,k-1} (E(k)) - E^T(k) K_{i,k}^{-1} E(k) \geq 0 \quad (\text{پ ۴-۲})$$

بنابراین، قید (۴۹) را میتوان با اعمال لم مکمل شور [۲۲] نتیجه گرفت. همچنین، قید (۵۰) را میتوان با گسترش ناتساوی (۴۲) به صورت زیر تأیید کرد:

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & N_{i,k} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} u_{e,\max}^2 & V^e G_{i,k} \\ * & K_{i,k}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & N_{i,k} \end{pmatrix} \geq 0 \quad (\text{پ ۵-۲})$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} u_{e,\max}^2 & V^e M_{i,k} \\ * & N_{i,k}^T K_{i,k}^{-1} N_{i,k} \end{pmatrix} \geq 0$$

بر اساس این واقعیت که $N_{i,k}^T K_{i,k}^{-1} N_{i,k} \geq N_{i,k} + N_{i,k}^T - K_{i,k}$ ، اگر قید (۵۰) برقرار باشد، آنگاه (پ ۵-۲) برقرار است و اثبات قضیه ۲ تکمیل می‌شود.

تعارض منافع

"هیچ‌گونه تعارض منافع توسط نویسندگان بیان نشده است."

تشکر و قدردانی

این پژوهش مستخرج از طرح پژوهشی مستقل شماره ۹ با دانشکده برق دانشگاه شهید بهشتی بوده و تامین مالی آن توسط پژوهشگاه فضایی ایران صورت گرفته است. ضمناً با توجه به استعلام اخیر صورت گرفته در نرم افزار بله، همکاران محترم طرح مخالف ذکر اسامی در هر قسمتی از مقاله هستند.

- points,” *Aerospace science and technology*, vol. 77, pp. 235-243, 2018.
- [19] S. Shi, Z. Shi and Z. Fei, “Asynchronous control for switched systems by using persistent dwell time modeling,” *Systems & Control Letters*, vol. 133, pp.104523, 2019.
- [20] Y. Qi, W. Yu, J. Huang and Y. Yu, “Model predictive control for switched systems with a novel mixed time/event-triggering mechanism,” *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, vol. 42, pp. 101081, 2022.
- [21] M. Aminsafae and M. Shafiei, “Stabilization of uncertain nonlinear discrete-time switched systems with state delays: A constrained robust model predictive control approach,” *Journal of Vibration and Control*, vol. 25, no. 14, pp. 2079-2090, 2019.
- [15] H. H. Yaghini, H. Kharrati, and A. Rahimi, “Linear time-varying fractional-order model predictive attitude control for satellite using two reaction wheels,” *Aerospace Science and Technology*, vol. 145, pp. 108901, 2024.
- [16] Y. Zhou, Y. Hu, K. V. Ling, and F. Ding, “Hybrid Two-Stage Identification-Based Nonlinear MPC Strategy for Satellite Attitude Control,” *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2025.
- [17] T. Huang, J. Zhang, M. Li, Y. Shen, J. Wu, and H. Wang, “Self-triggered MPC with adaptive prediction horizon for nano-satellite attitude control system,” *Advances in Space Research*, vol. 75, no. 2, pp. 2251-2270, 2025.
- [18] S. Saki, and H. Bolandi, “Optimal direct adaptive soft switching multi-model predictive control using the gap metric for spacecraft attitude control in a wide range of operating