



Available in:
Journal.isrc.ac.ir

Journal of Space Science,
Technology & Applications
(Persian)

Vol. 5, No. 2, pp.: 14-22
2026

DOI:
[10.22034/jssta.2025.465162.1185](https://doi.org/10.22034/jssta.2025.465162.1185)

Article Info

Received: 2024-06-28
Accepted: 2024-12-19

Keywords

Earth-Moon three-body
Problem
Solar sail
Non-autonomous systems
Poincaré map
Differential correction

How to Cite this article

E. Abbasali, A. R. Kosari, M. Bakhtiari, "Innovative Approach for Solar Sail Periodic Orbits Identification in Non-Autonomous Circular Restricted Three-Body Systems", *Journal of Space Science, Technology & Applications*, Vol. 5, No. 2, pp. 14-22, 2026.

Innovative Approach for Solar Sail Periodic Orbits Identification in Non-Autonomous Circular Restricted Three-Body Systems

Ehsan Abbasali¹, Amirreza Kosari^{2*}, Majid Bakhtiari³

¹ PhD student in Aerospace engineering, School of Aerospace Engineering, College of Multidisciplinary Science and Technology, University of Tehran, Tehran, Iran, ehsan.abbasali@ut.ac.ir

^{2*} Associate Professor of Aerospace engineering, School of Aerospace Engineering, College of Multidisciplinary Science and Technology, University of Tehran, Tehran, Iran, Kosari_a@ut.ac.ir

³ Assistant Professor of Mechanical Engineering, School of Advanced Technologies, Iran University of Science and Technologies, Tehran, Iran, bakhtiari_m@iust.ac.ir

Abstract

Solar sails are currently being widely used for various space applications, including deep space missions. While most of these applications are studied within the framework of the Sun-Earth three-body problem, limited research has been conducted to explore the potential of solar sails in the Earth-Moon three-body problem. The aim of this paper is to identify new periodic orbits for solar sails within the context of the Earth-Moon three-body problem. By incorporating the acceleration caused by solar sail radiation pressure into the Earth-Moon three-body problem, the system becomes non-autonomous, requiring different methods for extracting periodic orbits. In this study, the identification of periodic orbits for solar sails in the circular restricted Earth-Moon three-body problem is formulated as a two-point boundary value problem. Initially, preliminary guesses for periodic orbits of a simple spacecraft, without considering solar sail acceleration, are obtained using a Poincaré map. Then, the precise initial conditions for the periodic orbits of the solar sail are determined through a differential correction algorithm. To validate the proposed approach, the resulting orbits are plotted and their stability is compared with the periodic orbits of a spacecraft without a solar sail.

رویکردی نوآورانه به منظور شناسایی مدارهای متناوب بادبان خورشیدی در مسئله سه جسم محدودشده دایروی غیرخودمختار

احسان عباسعلی^۱، امیررضا کوثری^{۲*} و مجید بختیاری^۳

۱- دانشگاه تهران، دانشکده‌گان علوم و فناوری های میان رشته ای - ehsan.abbasali@ut.ac.ir

۲- دانشگاه تهران، دانشکده‌گان علوم و فناوری های میان رشته ای - kosari_a@ut.ac.ir

۳- دانشگاه علم و صنعت ایران، دانشکده فناوری‌های نوین - bakhtiari_m@iust.ac.ir

نویسنده مسئول *

دسترس پذیر در نشانی:

Journal.isrc.ac.ir

دوفصلنامه علوم، فناوری و
کاربردهای فضایی

سال پنجم، شماره ۲، صفحه ۱۴-۲۲
پاییز و زمستان ۱۴۰۴

DOI:

10.22034/isssta.2025.465162.1185

چکیده

بادبان‌های خورشیدی در حال حاضر به‌طور گسترده‌ای برای کاربردهای متنوع فضایی، از جمله مأموریت‌های اعماق فضا، مورد استفاده قرار می‌گیرند. بیشتر این کاربردها در چارچوب مسئله سه‌جسمی خورشید-زمین تعریف می‌شوند، در حالی که پژوهش‌های اندکی به بررسی پتانسیل بادبان‌های خورشیدی در مسئله سه‌جسمی زمین-ماه پرداخته‌اند. هدف مقاله حاضر، شناسایی مدارهای دوره‌ای جدید برای بادبان‌های خورشیدی در چارچوب مسئله سه‌جسمی زمین-ماه است. با افزودن شتاب ناشی از فشار تابشی بادبان خورشیدی به مسئله سه‌جسمی زمین-ماه، سیستم به یک سیستم غیرخودمختار تبدیل می‌شود، که این امر روش‌های متداول استخراج مدارهای دوره‌ای را تغییر می‌دهد. در این پژوهش، مسئله شناسایی مدارهای دوره‌ای بادبان خورشیدی در مسئله سه جسم محدودشده دایروی زمین-ماه، به‌عنوان یک مسئله دو مقدار مرزی مورد تحلیل قرار گرفته است و بدین‌منظور، ابتدا حدس‌های اولیه مدارهای دوره‌ای یک فضایم‌ای ساده، بدون در نظر گرفتن شتاب بادبان خورشیدی، از طریق نگاشت پوانکاره به دست می‌آید. سپس شرایط اولیه دقیق این مدارهای دوره‌ای با استفاده از یک الگوریتم اصلاح دیفرانسیلی تعیین می‌شود. به‌منظور اعتبارسنجی رویکرد پیشنهادی، مدارهای استخراج‌شده رسم می‌شود و از نظر پایداری با مدارهای دوره‌ای یک فضایم‌ای بدون بادبان خورشیدی مقایسه خواهد شد.

تاریخچه داوری

دریافت: ۱۴۰۳/۰۴/۰۸

پذیرش: ۱۴۰۳/۱۰/۰۵

واژه‌های کلیدی

مساله سه جسم زمین-ماه، بادبان خورشیدی، سیستم غیرخودگردان، نگاشت پوانکاره، الگوریتم اصلاح دیفرانسیلی

نحوه استناد به این مقاله

احسان عباسعلی، امیررضا کوثری و مجید بختیاری، "رویکردی نوآورانه به‌منظور شناسایی مدارهای متناوب بادبان خورشیدی در مسئله سه جسم محدودشده دایروی غیرخودمختار"، دوفصلنامه علوم، فناوری و کاربردهای فضایی، جلد پنجم، شماره دوم، صفحات ۱۴-۲۲، ۱۴۰۴.

۱- مقدمه

خورشیدی می‌شود که منجر به تغییر رفتار این سیستم به یک سیستم غیر خودکار خواهد شد. این امر باعث آن خواهد شد که دیگر رویکردهای مورد استفاده برای فضاپیما بدون بادبان خورشیدی در این سیستم‌ها معتبر نباشند؛ بنابراین هدف اصلی مقاله حاضر ارائه یک رویکرد نو به منظور شناسایی مدارهای متناوب یک بادبان خورشیدی در مسئله سه جسم زمین-ماه است. بدین منظور پیشنهاد شده است که ابتدا حدس‌های اولیه مدارهای مذکور توسط نگاشت پوانکاره [۱۱، ۱۲] برای سیستم مسئله سه جسم ساده (بدون در نظرگیری بادبان خورشیدی) استخراج شود سپس حدس‌های مذکور توسط یک الگوریتم اصلاح دیفرانسیلی برای مسئله دارای بادبان خورشیدی اصلاح شود. علت این کار این است که با توجه به رفتار غیر خودکار سیستم بادبان خورشیدی در مسئله سه جسم زمین-ماه، نگاشت پوانکاره برای این سیستم قادر به شناسایی حدس‌های اولیه نخواهد بود. به منظور صلاحیت سنجی در نهایت مدارهای متناوب بادبان خورشیدی در سیستم زمین-ماه رسم شده و پایداری آن‌های نسبت به مدارهای متناوب فضاپیما بدون بادبان خورشیدی مقایسه خواهد شد.

۲- دینامیک سیستم

به‌طور معمول، حرکت یک فضاپیما دارای جرم m در میدان پتانسیل گرانشی دو سیاره با جرم‌های $m_1 > m_2$ ک در آن جرم فضاپیما نسبت به جرم سیارات بسیار ناچیز است در محیطی بانام مسئله سه جسم محدود شده انجام خواهد شد [۱۳]. درک سیستم مذکور در گام اول نیازمند شناخت دقیق قاب‌های مورد استفاده در آن است. مهم‌ترین قاب مورد استفاده در مسئله سه جسم محدود شده دایروی، قاب چرخان است که در آن فرض بر آن است که مرکز این قاب در مرکز جرم کل سیستم قرار گرفته است. جهت‌گیری محور $\hat{x}$ به سمت سیاره کوچک‌تر است و این محور همواره در راستای دو سیاره باقی خواهد ماند. محور $\hat{z}$ عمود بر صفحه حرکت سیارات بوده و محور $\hat{y}$ طبق نون راستگرد تعیین خواهد شد. فاصله سیاره بزرگ‌تر، سیاره کوچک‌تر و مرکز جرم سیستم تا مرکز جرم بادبان خورشیدی به ترتیب با نمادهای r_1 ، r_2 و r در شکل ۱ نمایش داده شده است. قاب چرخان با سرعت زاویه‌ای ω نسبت به قاب اینرسی دوران می‌کند و قاب اینرسی به‌گونه‌ای تعریف می‌شود که در زمان $t = 0$ کاملاً هم‌راستای قاب چرخان باشد. در سیستم بی‌بعد شده مسئله سه جسم، یکی از پارامترهای اساسی بانام پارامتر جرمی

استفاده از فناوری بادبان‌های خورشیدی پس از موفقیت‌های اخیر مانند مأموریت ایکاروس جاکسا [۱] و مأموریت NanoSail-D2 ناسا [۲] به سرعت در حال افزایش است. بادبان‌های خورشیدی دارای مزیت‌های متعددی همچون بی‌نیاز ساختن فضاپیما از سوخت-های شیمیایی و یونی است [۳]. به‌طور کلی، استفاده از بادبان خورشیدی فضایی یک امکان بسیار جذاب برای توسعه مأموریت‌های فضایی در آینده است. این تکنولوژی با توانایی‌هایش در کاهش وابستگی به سوخت، افزایش سرعت و کارایی، کاهش هزینه‌ها، اکتشافات علمی بیشتر و کاهش آلودگی، می‌تواند نقش مهمی در پیشرفت فعالیت‌های اکتشافی فضایی ایفا کند. پتانسیل بادبان خورشیدی در این واقعیت نهفته است که برخلاف سایر فناوری‌های رانش مانند نیروی محرکه الکتریکی، به یک منبع پیشران روی برد متکی نیست [۳، ۴]. بادبان‌های خورشیدی با بهره‌برداری از فشار تشعشع تولید شده توسط فوتون‌های خورشیدی که به یک غشای بزرگ و بسیار بازتابنده برخورد می‌کنند و منعکس می‌شوند، می‌توانند نیروی رانش پیوسته‌ای تولید کنند که تنها با طول عمر مواد غشایی در محیط فضا محدود می‌شود. تنها محدودیت‌های واقعی بادبان‌های خورشیدی ناتوانی آن‌ها در تولید یک جزء شتاب در جهت خورشید و این واقعیت است که فشار تابش خورشید با مجذور فاصله تا خورشید کاهش می‌یابد و کاربرد آن‌ها در خارج از منظومه شمسی را محدود می‌کند؛ بنابراین یکی از کاربردهای اصلی بادبان‌های خورشیدی، انجام مأموریت در اعماق فضا در داخل منظومه شمسی است. مسئله سه جسم محدود شده به‌عنوان یک تخمین مناسب از محیط فضا شناخته می‌شود که در آن یک فضاپیما در میدان پتانسیل گرانشی دو سیاره همانند زمین و ماه شناور است و جرم آن در مقابل سیارات بسیار ناچیز است [۵-۷]. این در حالی است که در مسئله دو جسم، فرض بر آن است که یک فضاپیما تنها تحت تأثیر میدان پتانسیل یک سیاره همانند زمین قرار دارد و اثر جسم سوم به‌عنوان اغتشاش در آن لحاظ می‌شود. بررسی حرکت بادبان خورشیدی در مسئله سه جسم زمین-خورشید به‌شرط تحلیل و حل یک سیستم خودکار است و با فرض آنکه تابش خورشید همواره عمود بر صفحه بادبان خورشیدی است، درک حرکت طبیعی آن فرق چندانی با یک فضاپیما بدون بادبان خورشیدی در مسئله مذکور ندارد [۸-۱۰]. در مقابل بررسی حرکت بادبان خورشیدی در مسئله سه جسم زمین-ماه، منجر به اضافه شدن ترمی به نام ترم شتاب

$$a_s = a_0(\hat{S}(t) \cdot \hat{n})^2 \hat{n} \quad (1)$$

که در آن $\hat{S}(t)$ جهت خط خورشیدی است که طبق رابطه زیر به دست خواهد آمد:

$$\hat{S} = [\cos(\Omega_s t) \quad -\sin(\Omega_s t) \quad 0]^T \quad (2)$$

در نهایت لازم به ذکر است که a_0 شتاب مشخصه بادبان واحدی غیر بعدی است. شتاب مشخصه، شتابی است که بادبان خورشیدی هنگام مواجهه با خورشید (در ۱ واحد نجومی) ایجاد می‌کند که در فرم بدون بعد برابر با $a_0 = 0.07$ است [۱۶]. در نهایت بردار نرمال خورشید طبق رابطه زیر استخراج خواهد شد. باید توجه شود که در این رابطه تابع پله u_s به منظور تنظیم بردار نرمال در زمان قرارگیری سطح بادبان در سایه (زمانی که نور خورشید به سطح بادبان نمی‌تابد) است:

$$\hat{n} = u_s(\cos(\Omega_s t))[1 \ 0 \ 0]^T \quad (3)$$

در ادامه با در اختیار داشتن شتاب تابش خورشیدی، معادله برداری حرکت بادبان خورشیدی در مسئله سه جسم محدود شده زمین-ماه به صورت زیر نوشته خواهد شد:

$$\ddot{r} + 2\omega \times \dot{r} = a_s - \nabla U \quad (4)$$

که در آن تابع شبه پتانسیل U به صورت زیر خواهد بود:

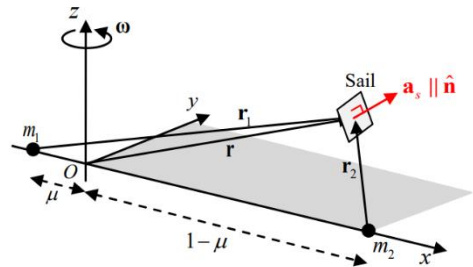
$$U = -\frac{x^2 + y^2}{2} - \left(\frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \right) \quad (5)$$

در معادله بالا x, y نشان دهنده موقعیت بادبان خورشیدی در قاب چرخان بوده و فاصله بادبان به ترتیب از زمین و ماه با نمادهای r_1 و r_2 نمایش داده شده است:

$$r_1 = [x + \mu \quad y \quad z]^T \quad (6)$$

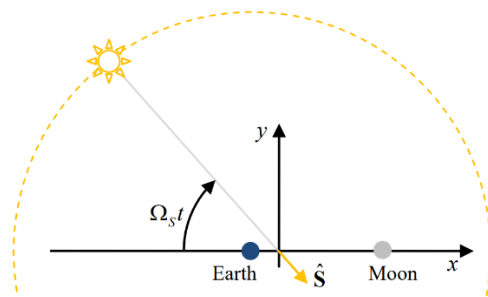
$$r_2 = [x - (1-\mu) \quad y \quad z]^T \quad (7)$$

شناخته می‌شود که از رابطه $\mu = \frac{m_2}{m_1+m_2}$ به دست می‌آید. در سیستم بدون بعد، مکان سیارات همان‌طور که در شکل ۱ نیز نمایش داده شده است برحسب پارامتر جرمی μ بیان خواهد شد.

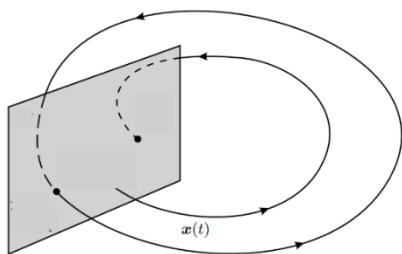


شکل (۱): شماتیکی از حرکت بادبان خورشیدی در مسئله سه جسم محدود شده

همان‌طور که در شکل ۱ مشخص است، فرض بر آن است که بردار شتاب خورشیدی a_s همواره عمود بر صفحه بادبان خورشیدی است و یا به بیانی دیگر همواره موازی با بردار نرمال بادبان خورشیدی $\hat{n}$ است [۱۴]. به منظور درک حرکت بادبان خورشیدی در سیستم زمین-ماه ابتدا نیاز است تا بردار شتاب خورشیدی در این سیستم مدل سازی شود. بدین منظور نیاز است تا زاویه تابش خورشیدی در سیستم زمین-ماه سه جسم مدل سازی شود. به منظور این مدل سازی شکل شماتیکی از نرخ زاویه ای خط خورشید در واحد بدون بعد Ω_s در سیستم زمین-ماه در شکل ۲ آورده شده است.



شکل (۲): شکل شماتیک سیستم غیر خودکار سیستم زمین-ماه در شکل ۲، برای شتاب بادبان خورشیدی، یک مدل بادبان ایدئال در نظر گرفته شده است [۲، ۱۵]. بادبان خورشیدی ایدئال بادبانی است که کاملاً منعکس کننده و کاملاً مسطح باشد. در این صورت بردار شتاب خورشیدی به صورت زیر نوشته خواهد می‌شود:



شکل (۳): شماتیکی از نگاشت پوانکاره سیستم خودکار

به منظور رسم این نگاشت برای مسئله بادبان خورشیدی در سیستم زمین- ماه ابتدا معادلات فضاپیما بدون بادبان خورشیدی که نوعی سیستم خودکار است در نظر گرفته می شود. این معادلات در تحقیقات عباسعلی یافت می شود [۹] سپس صفحه $y = 0$ که دارای مختصات $x - \dot{x}$ است به صورت عمودی در مسیر جریان دینامیکی قرار گرفته و رفته رفته نگاشت مذکور تشکیل خواهد شد. مرز جزایر به دست آمده به عنوان حدس های اولیه مناسب و ورودی های الگوریتم دیفرانسیلی که در قسمت بعد به آن اشاره شده است انتخاب خواهند شد. ذکر این نکته الزامی است که با توجه به تحقیقات قبلی [۹]، رسم نگاشت پوانکاره فقط برای پارامترهای x و $\dot{x}$ منجر به رسم نگاشتی شامل جزایری خواهد شد که شرایط اولیه مناسب پارامترهای مداری از آن استخراج خواهد گردید و رسم این نگاشت برای پارامترهای دیگر منجر به پیدایش جزایر نخواهد شد.

۵- الگوریتم اصلاح دیفرانسیلی

فرض کنید که مدار حرکت سیارات اصلی در صفحه xz قرار گیرند. در حالت کلی بردار حدس های اولیه پارامترهای حالت مداری به صورت $\bar{X}_0 = [x_0, y_0, z_0, v_{x_0}, v_{y_0}, v_{z_0}]$ نوشته می شود اگر عبور مجدد مدار متناوب از صفحه xz به صورت $\bar{X}(\frac{T}{2}) = [x, 0, z, 0, v_x, 0]$ تعریف شود که در آن T زمان تناوب است، آنگاه هر دو شرط تقارن و نیز عمود بودن به صفحه حرکت جاذب ها در تمام مسیر ارضا شده و مدار متناوب خواهد بود. به مداری که دارای ویژگی های مذکور باشد اصطلاحاً مدارهای هاله ای گفته می شود. بدین منظور با در نظرگیری شرایط اولیه، فرآیند انتگرال گیری از معادلات حاکم بر حرکت مداری (۴) تا زمانی که مؤلفه y تغییر علامت دهد انجام خواهد شد. در این زمان اگر $v_x = 0, v_z = 0$ باشد آنگاه به مداری متناوب هاله ای دست یافته ایم. در غیر این صورت اگر در این زمان $v_x \neq 0, v_z \neq 0$ باشد، آنگاه فرض می کنیم که

۳- مدارهای متناوب بادبان خورشیدی

پس از استخراج معادلات حرکت بادبان خورشیدی، به هدف اصلی این پژوهش یعنی دست یافتن به مدارهای متناوب بادبان خورشیدی در مسئله سه جسم محدود شده زمین- ماه پرداخته خواهد شد. با توجه به غیرخطی بودن معادلات استخراج شده، هیچ حل حلقه بسته ای برای این معادلات موجود نیست و استفاده از حل های عددی غیر قابل اجتناب است. حل های عددی وابستگی بسیار زیادی به شرایط اولیه داشته و لذا شناسایی پاسخ های متناوب مداری، نیازمند شرایط دقیقی از پارامترهای مداری است. تاکنون مطالعات متعددی بر نحوه به دست آوردن شرایط اولیه مذکور انجام شده است؛ اما باید توجه داشت که با توجه به رفتار غیر خودکار بادبان خورشیدی در مسئله سه جسم محدود شده زمین- ماه در حضور تابش خورشید، استفاده از روش های مذکور سودمند نخواهد بود چراکه این روش ها به منظور شناسایی شرایط اولیه دقیق در مسائل خودکار توسعه یافته اند. بدین منظور در این مطالعه پیشنهاد می شود که ابتدا بردار حدس های اولیه توسط نگاشت پوانکاره استخراج شود و سپس این بردار توسط یک الگوریتم اصلاح دیفرانسیلی موجود در کارهای عباسعلی [۸] مورد اصلاح قرار گیرد.

۴- نگاشت پوانکاره

در مبحث معادلات دیفرانسیلی خودکار نگاشت پوانکاره ابزاری قدرتمند به منظور شناسایی پاسخ های پریودیک یک سیستم دیفرانسیلی n بعدی به فرم $\dot{X} = F(X)$ است که این کار با استفاده از تقلیل ابعاد سیستم به $n - 1$ بعد صورت خواهد گرفت. روش کار بدین صورت است که ابتدا صفحه ای شامل مختصات پارامترهای مطلوب مطالعه ساخته شده و سپس این صفحه به صورت عمود بر مسیر جریان قرار گرفته و با هر بار بازگشت معادلات دیفرانسیلی به صفحه مذکور در حل های متوالی، مختصات نقاط بازگشتی با یک نقطه بر روی صفحه مذکور مشخص خواهند شد. مرز جزایر به دست آمده می توانند به عنوان حدس های اولیه مناسب انتخاب شوند. در ادامه شکل شماتیکی از نگاشت پوانکاره در شکل ۳ نشان داده می شود:

$$\begin{pmatrix} \delta v_x \\ \delta v_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{o41} & \Phi_{o45} \\ \Phi_{o61} & \Phi_{o65} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta z_0 \\ \delta v_{y0} \end{pmatrix} - \frac{1}{v_y} \begin{pmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_z \end{pmatrix} (\Phi_{o23} \quad \Phi_{o25}) \quad (12)$$

۶- نتایج

هدف اصلی این مقاله به دست آوردن مدارهای متناوب یک بادبان خورشیدی در سیستم زمین-ماه است. ثوابت سیستم مذکور در جدول ۱ خلاصه شده است:

جدول (۱): ثوابت سیستم زمین-ماه

μ	0.01215
Totale μασσ ($\mu_1 + \mu_2$)	$6.04718 \times 10^{24} \text{ kg}$
Εαρτη-Μοον διασταση	384,401 km
Ονε τιμε υνιτ	$3.7749 \times 10^5 \text{ s}$
Ω_Σ	0.9252

در ادامه همان طور که در قبل نیز اشاره شد، سعی می شود تا ابتدا نداشت پوانکاره برای سیستم مسئله سه جسم محدود شده زمین-ماه برای یک فضاپیما بدون بادبان خورشیدی (سیستم خودکار) رسم شود. شرایط اولیه این حل معادل مختصات نقطه لاگرانژی L_1 سیستم زمین ماه انتخاب شده و نتایج این حل در شکل ۴ نشان داده شده است:

بردار اصلاح حدس های اولیه به صورت $[\delta x_0, 0, \delta z_0, 0, \delta v_{y0}, 0]$ نوشته شود. در زمانی که $y(\frac{T}{2}) = 0$ باشد آنگاه مقادیر δv_{z0} و δv_{x0} باید به گونه ای تغییر یابد که حدس های اولیه را به منظور رسیدن به شرایط اولیه دلخواه، اصلاح کند. ماتریس انتقال حالت معادلات مداری ($STM_o = \Phi_o$) در زمان $(\frac{T}{2})$ می تواند ارتباط بین بردار حدس اولیه مداری در زمان اولیه و در زمان نصف تناوب را فراهم سازد. این ماتریس در کلی ترین حالت به صورت زیر تعریف می شود که در آن ماتریس ژاکوبین^۱ معادلات (۴) در فضای حالت و $I_{6 \times 6}$ نماینده ماتریس یکه^۲ است.

$$\begin{aligned} \Phi_o(t, 0) &= I_{6 \times 6} \Phi_o \\ \Phi_o(0, 0) &= I_{6 \times 6} \end{aligned} \quad (8)$$

الگوریتم اصلاح شرایط اولیه مداری از رابطه زیر به دست خواهد آمد [۱۷]:

$$\delta \bar{X} = \Phi_o\left(\frac{T}{2}, 0\right) \delta \bar{X}_0 + \frac{\partial \bar{X}}{\partial t} \delta\left(\frac{T}{2}\right) \quad (9)$$

باید توجه کرد که تغییرات مؤلفه y در زمان ابتدایی نسبت به زمان پایانی صفر خواهد بود، بنابراین خواهیم داشت:

$$\delta y = 0 = \Phi_{o21} x_0 + \Phi_{o23} z_0 + \Phi_{o25} v_{y0} + v_y \delta\left(\frac{T}{2}\right) \quad (10)$$

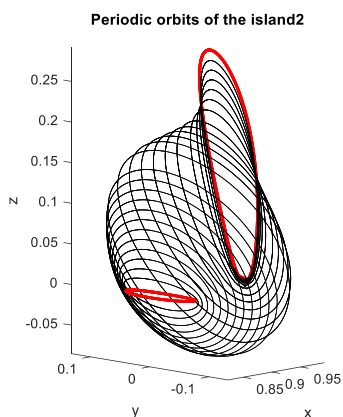
حال اگر $x_0 > z_0$ باشد بهتر است z_0 را ثابت لحاظ کرده و اعمال تغییرات تنها روی x_0 و v_{y0} ایجاد شود:

$$\begin{pmatrix} \delta v_x \\ \delta v_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{o43} & \Phi_{o45} \\ \Phi_{o63} & \Phi_{o65} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_0 \\ \delta v_{y0} \end{pmatrix} - \frac{1}{v_y} \begin{pmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_z \end{pmatrix} (\Phi_{o21} \quad \Phi_{o25}) \quad (11)$$

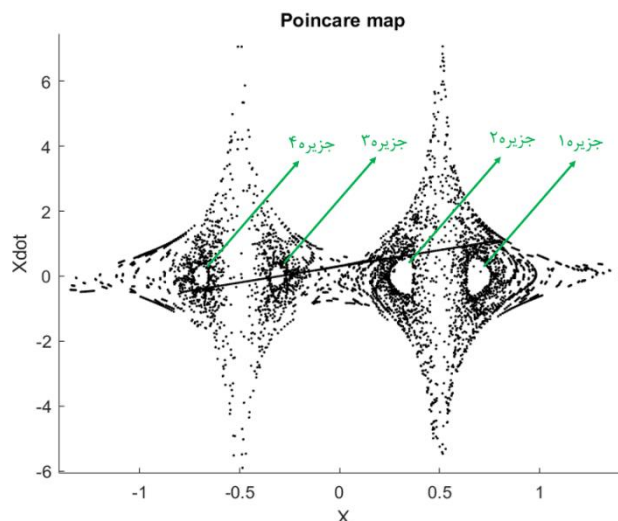
و اگر $z_0 > x_0$ باشد بهتر است x_0 را ثابت لحاظ کرده و اعمال تغییرات تنها روی z_0 و v_{y0} ایجاد شود:

² Identify matrix

¹ Jacobian matrix



شکل (۴): مدارهای متناوب به دست آمده از جزایر ۲ در شکل ۴



شکل (۴): نگاشت پوانکاره سیستم زمین-ماه خودکار

با توجه به مدارهای به دست آمده در شکل های ۵ و ۶ می توان به صلاحیت روند پیشنهادی به منظور استخراج مدارهای متناوب یک بادبان خورشیدی در مسئله سه جسم محدودشده زمین-ماه پی برد. برخی از شرایط اولیه رسم مدارهای آورده شده در شکل ۵ و ۶ در جدول ۲ و جدول ۳ خلاصه شده است:

جدول (۲): برخی از شرایط اولیه مدارهای متناوب بادبان خورشیدی

رسم شده در شکل ۵

مدار	x	y	z	$\dot{x}$	$\dot{y}$	$\dot{z}$	T
شکل ۵	-0.94	0	0.24	0	0.43	0	3.60
شکل ۵	-0.97	0	0.21	0	0.421	0	3.54
شکل ۵	-0.98	0	0.225	0	0.419	0	3.49
شکل ۵	-1.00	0	0.228	0	0.417	0	3.33
شکل ۵	-1.02	0	0.17	0	0.41	0	3.25
شکل ۵	-1.21	0	0.18	0	0.38	0	3.21

جدول (۳): برخی از شرایط اولیه مدارهای متناوب بادبان خورشیدی

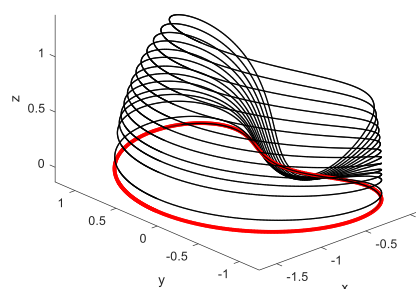
رسم شده در شکل ۵

مدار	x	y	z	$\dot{x}$	$\dot{y}$	$\dot{z}$	T
شکل ۶	0.86	0	0.15	0	-0.21	0	3.52
شکل ۶	0.93	0	0.19	0	-0.18	0	3.61
شکل ۶	0.97	0	0.23	0	-0.31	0	3.69
شکل ۶	0.981	0	0.27	0	-0.32	0	3.71
شکل ۶	0.984	0	0.283	0	-0.35	0	3.78
شکل ۶	0.993	0	0.289	0	-0.37	0	3.82

مطالعات انجام شده بر روی مدارهای استخراج شده نشان می دهد که این مدارها به طور میانگین تا ۱۵ دوره تناوب در مدار خود باقی مانده و رفتار متناوب پایداری از خود نشان می دهند. این در

همان طور که اشاره شد، مرز جزایر به دست آمده در شکل ۴، می تواند کاندید مناسبی به منظور ورودی الگوریتم اصلاح دیفرانسیلی استخراج شده باشد؛ بنابراین در ادامه نقاط مرزی جزایر فوق به عنوان حدس های اولیه انتخاب شده و سپس توسط الگوریتم دیفرانسیلی اصلاح مداری اصلاح خواهند شد تا شرایط اولیه دقیق مدارهای متناوب بادبان خورشیدی در مسئله سه جسم محدودشده زمین-ماه استخراج شود. نمونه هایی از نتایج روند پیشنهادی در شکل های ۵ و ۶ آورده شده است. این شکل ها به ترتیب مربوط به جزایر ظاهر شده (جزایر ۱ و ۲) در شکل ۴ است:

Periodic orbits of the island 1



شکل (۵): مدارهای متناوب به دست آمده از جزایر ۱ در شکل ۴

جزایر ظاهر شده در نگاشت در ادامه به عنوان حدس‌های اولیه الگوریتم اصلاح دیفرانسیلی که بر مبنای معادلات غیر خودکار توسعه داده شد، انتخاب شد و سپس توسط الگوریتم اصلاح دیفرانسیلی پیشنهادی مورد اصلاح قرار گرفت. به منظور صلاحیت سنجی روش پیشنهادی، در گام آخر، مدارهای متناوب به دست آمده از جزایر ظاهر شده در نگاشت پوانکاره رسم شد. متناوب بودن مدارهای مذکور دلیل خوبی بر صلاحیت رویکرد پیشنهادی بود. همچنین نشان داده شد که مدارهای مذکور تا ۱۵ دوره تناوب در مدار خود باقی مانده و رفتاری متناوب نشان می‌دهند. این در صورتی است که طبق مطالعات پیشین، مدارهای متناوب سیستم خودکار تنها تا ۷ دوره متناوب خواهند بود که این امر نشان‌دهنده پایداری بالاتر مدارهای به دست آمده در پژوهش حاضر بود.

تعارض منافع

"هیچ گونه تعارض منافع توسط نویسندگان بیان نشده است."

مراجع

- [1] Y. Tsuda and et al., "Achievement of IKAROS—Japanese deep space solar sail demonstration mission," *Acta Astronaut.*, vol. 82, no. 2, pp. 183–188, 2013.
- [2] J. Lieve, "Solar sailing attitude control of large geostationary satellite," in *Automatic Control in Space 1985*, Elsevier, pp. 29–32, 1986.
- [3] A. Colagrossi and M. Lavagna, "Preliminary results on the dynamics of large and flexible space structures in Halo orbits," *Acta Astronaut.*, vol. 134, pp. 355–367, 2017, doi: <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2017.02.020>.
- [4] M. Xu and S. Xu, "Structure-Preserving Stabilization for Hamiltonian System and its Applications in Solar Sail," *J. Guid. Control. Dyn.*, vol. 32, no. 3, pp. 997–1004, May 2009, doi: 10.2514/1.34757.
- [5] H. D. Curtis, *Orbital mechanics for engineering students*. Butterworth-Heinemann, 2013.
- [6] K. I. Alvarado and S. K. Singh, "Orbit maintenance via homeomorphic, periodic orbit revs in the Elliptic Restricted Three-Body Problem," in *Proceedings of the 2023 AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference, Big Sky, MT, USA*, pp. 13–17, 2023.
- [7] V. Y. Kezerashvili and R. Y. Kezerashvili, "Theoretical approach to circular solar sail deployment," *Adv. Sp. Res.*, vol. 73, no. 9, pp. 4731–4741, 2024.
- [8] E. Abbasali and M. Bakhteiari, "Restricted three body problem considering the perturbations of both oblate massive primaries," *J. Aerosp. Sci. Technol.*, vol. 13, no. 2.

حالی است که طبق [۱۸]، مدارهای متناوب سیستم‌های خودکار به طور متوسط تنها تا ۷ دوره تناوب پایدار می‌مانند. این امر به طور واضح نشان‌دهنده پایداری بالاتر مدارهای به دست آمده در این مقاله نسبت به روش‌های پیشین است.

یکی از ویژگی‌های بارز روش ارائه شده در این پژوهش، جامعیت و انعطاف‌پذیری بالا در مواجهه با شرایط مختلف است. به عبارتی، در صورت بروز هرگونه اغتشاش یا وجود عدم قطعیت در پارامترهای سیستم، فرآیند شناسایی مدارهای متناوب تحت تأثیر قرار نمی‌گیرد و بدون تغییر ادامه می‌یابد. این ویژگی مهم، کاربردپذیری گسترده، روش ارائه شده را در شرایط واقعی و پیچیده فضایی نشان می‌دهد. علاوه بر این، مقایسه انجام شده میان روش پیشنهادی و روش‌های متداول، نشان می‌دهد که روش ما نه تنها از نظر پایداری مدارها بلکه از لحاظ دقت و سازگاری نیز عملکرد بهتری دارد. این موضوع می‌تواند مسیر را برای کاربردهای عملی در مأموریت‌های فضایی و سیستم‌های دینامیکی پیچیده هموار کند.

بنابراین، روش پیشنهادی نه تنها یک ابزار قدرتمند برای شناسایی مدارهای متناوب پایدارتر ارائه می‌دهد، بلکه می‌تواند به عنوان یک راه حل مطمئن برای مواجهه با عدم قطعیت‌ها و اغتشاشات احتمالی نیز مطرح شود.

۷- جمع‌بندی

هدف اصلی مطالعه حاضر، استخراج مدارهای متناوب یک فضاپیما دارای بادبان خورشیدی در مسئله سه جسم محدود شده زمین-ماه بود. بدین منظور ابتدا نشان داده شد که، برخلاف مطالعه رفتار یک فضاپیما بدون بادبان خورشیدی در مسئله سه جسم زمین-ماه که جزو مسائل خودکار حساب می‌شود، مسئله مذکور در حوزه مسائل غیر خودکار قرار می‌گیرد که این موضوع به دلیل اضافه نمودن شتاب خورشیدی به مسئله خودکار و معرفی زاویه نرخ تابش خورشیدی است. اشاره شد که رویکردهای مورد مطالعه به منظور شناسایی شرایط اولیه مدارهای متناوب در مسئله سه جسم محدود شده خودکار نمی‌توانند در مسئله سه جسم محدود شده غیر خودکار کارآمد باشند. به همین علت پیشنهاد شد که ابتدا بردار حدس‌های اولیه حالت‌های مداری توسط نگاشت پوانکاره یک سیستم سه جسم محدود شده خودکار استخراج شود. نقاط مرزی

- “Vacuum deployment and testing of a 4-quadrant scalable inflatable rigidizable solar sail system,” in *46th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, 2005, p. 2122.
- [15] J. ACORD and J. Nicklas, “Theoretical and Practical Aspects of Solar Pressure Attitude Control for Interplanetary Spacecraft,” in *Guidance and Control Conference*, 1964, p. 327.
- [16] P. Musen, “The influence of the solar radiation pressure on the motion of an artificial satellite,” *J. Geophys. Res.*, vol. 65, no. 5, pp. 1391–1396, 1960.
- [17] K. C. Howell, “Three-dimensional, periodic, ‘halo’ orbits,” *Celest. Mech.*, vol. 32, no. 1, pp. 53–71, 1984.
- [18] V. K. Srivastava, J. Kumar, and B. S. Kushvah, “Regularization of circular restricted three-body problem accounting radiation pressure and oblateness,” *Astrophys. Space Sci.*, vol. 362, no. 3, p. 49, 2017.
- [9] A. Soumakh, K. Raeisi, O. Negarash, and M. Navabi, “Orbital altitude increase maneuver using an ideal solar sail up to the L1 Lagrange point for a Galileo satellite located in MEO orbit,” presented at the International Conference of the Iranian Aerospace Society, 2014.
- [10] M.-H. Salehnia, J. Shirazi, and R. Esmailzadeh, “Attitude control of an Earth-pointing satellite using solar panels without azimuth angle and gyroscope measurements,” presented at the International Conference of the Iranian Aerospace Society, 2013.
- [11] E. Abbasali, A. Kosari, and M. Bakhtiari, “Effects of oblateness of the primaries on natural periodic orbit-attitude behaviour of satellites in three body problem,” *Adv. Sp. Res.*, 2021.
- [12] E. I. Abouelmagd, A. A. Alshaery, and F. Gao, “New dynamical system for circular satellites relative motion,” *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 182, p. 114879, 2024.
- [13] M. Bakhtiari, E. Abbasali, and K. Daneshjoo, “Minimum Cost Perturbed Multi-impulsive Maneuver Methodology to Accomplish an Optimal Deployment Scheduling for a Satellite Constellation,” *J. Astronaut. Sci.*, vol. 70, no. 3, p. 18, 2023.
- [14] D. Lichodziejewski, B. Derbes, K. Slade, and T. Mann,