



Available in:  
Journal.isrc.ac.ir

Journal of  
Space Science, Technology  
& Applications (Persian)

Vol. 3, No. 2, pp.: 126-139  
2024

DOI:  
10.22034/jस्ता.2023.412482.1139

### Article Info

Received: 2023-08-20  
Accepted: 2024-01-16

### Keywords

Interval arithmetic, Satellite,  
Attitude determination,  
robust estimation, Multi-  
objective optimization, The  
Wahba problem

### How to Cite this article

Hossein Ghadiri, Reza  
Esmaelzadeh, Reza  
Zardashti, "Robust optimal  
attitude determination of the  
satellite based on the min-  
max optimization  
algorithm", *Journal of Space  
Science, Technology and  
Applications*, vol 3 (2), p.:  
126-139, 2024.

## Robust optimal attitude determination of the satellite based on the min-max optimization algorithm

Hossein Ghadiri<sup>1\*</sup>, Reza Esmaelzadeh<sup>2</sup>, Reza Zardashti<sup>3</sup>

- \*Aerospace Department, Malek Ashtar University of Technology, Tehran, Iran  
Hosseinghadiri66@gmail.com
- Aflak Science and Technology Co., Tehran, Iran  
resmael@gmail.com
- Aerospace Department, Malek Ashtar University of Technology, Tehran, Iran  
reza.zardashti@dena.kntu.ac.ir

### Abstract

Generally, the determination methods of the satellite orientation are known as attitude determination and attitude estimation. The attitude determination solution of the satellite leads to the Wahba problem. Therefore, at least two independent measurement vectors and two corresponding reference vectors are needed to apply the Wahba problem. These input vectors aren't accurate due to sensor noises, misalignment, and low-order approximations. However, these uncertainties aren't considered in the classic Wahba problem directly. In this case, the estimation error of the Wahba problem depends on the input vectors' accuracy. Hence, modeling error and measurement noise are modeled using Interval analysis. Then, the attitude determination problem is transformed from a single-objective problem to a multi-objective robust optimization problem. Since solving the multi-objective problem with heuristic solvers such as NSGA II is time-consuming, the multi-objective problem was solved using the min-max optimization algorithm. The attitude determination error with the proposed method is reduced (7 times) compared to the quaternion method, and its dependence on the accuracy of the input vectors is reduced (200 times). In fact, while reducing the mean attitude error, the algorithm robustness has increased compared to the uncertainties in the input vectors. Using the min-max algorithm has reduced the execution time of the algorithm (about 600 times) compared to the NSGA II algorithm and is suitable for real-time applications. Based on the results, the proposed method has narrower bounds, so that the mean square error (RMS) is decreased by more than 50% over the q-method.



## تعیین وضعیت بهینه مقاوم ماهواره مبتنی بر الگوریتم بهینه‌یابی کمینه-بیشینه

دسترس‌پذیر در نشانی:  
Journal.isrc.ac.ir

دو فصلنامه

علوم، فناوری و  
کاربردهای فضایی

سال سوم، شماره ۲، صفحه ۱۳۹-۱۲۶  
پاییز و زمستان ۱۴۰۲

DOI:

10.22034/jssta.2023.412482.1139

تاریخچه داوری

دریافت: ۱۴۰۲/۰۵/۲۹

پذیرش: ۱۴۰۲/۱۰/۲۶

واژه‌های کلیدی

حساب بازه‌ای، ماهواره، تعیین  
وضعیت، تخمین مقاوم، بهینه  
سازی چندهدفه، مسئله وهبا

نحوه استناد به این مقاله

حسین قدیری، رضا اسماعیل زاده، رضا  
زردشتی، "تعیین وضعیت بهینه مقاوم  
ماهواره مبتنی بر الگوریتم بهینه‌یابی  
کمینه-بیشینه"، دو فصلنامه علوم،  
فناوری و کاربردهای فضایی، جلد سوم،  
شماره دوم، صفحات ۱۳۹-۱۲۶،  
۱۴۰۲.

حسین قدیری\*<sup>۱</sup>، رضا اسماعیل زاده<sup>۲</sup>، رضا زردشتی<sup>۳</sup>

۱- دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران - hosseinghadiri66@gmail.com

۲- شرکت علم و فناوری افلاک، تهران، ایران - resmael@gmail.com

۳- دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران - reza.zardashti@dena.kntu.ac.ir

\* نویسنده مسئول

### چکیده

عموماً روش‌های تشخیص جهت‌گیری ماهواره با عناوین تعیین وضعیت و تخمین وضعیت شناخته می‌شوند. حل مسئله تعیین وضعیت ماهواره منجر به حل مسئله وهبا می‌شود. به منظور به کارگیری مسئله وهبا نیاز به حداقل دو بردار اندازه‌گیری مستقل در دستگاه سنسور و بردارهای متناظر در دستگاه مرجع است. با وجود اینکه اندازه‌گیری سنسورها، به دلیل وجود نویز و ناهمراستایی، دارای عدم قطعیت است و بردارهای مرجع نیز تقریبی از این اندازه‌گیری‌ها هستند، لیکن، این عدم قطعیت‌ها در مسئله وهبا در نظر گرفته نشده‌اند. به طوری که دقت تخمین این روش‌ها به دقت بردارهای ورودی وابسته است. به منظور رفع این کاستی، فرض شده است تمام نامعینی‌ها کراندار هستند و تمام خطاها با حساب بازه‌ای مدل شده است. سپس، مسئله تعیین وضعیت از یک مسئله تک هدفه به یک مسئله بهینه‌یابی مقاوم چندهدفه با دو تابع هدف و قیود غیرخطی تبدیل می‌شود. از آنجا که حل مسئله چندهدفه با حلگرهای اکتشافی نظیر NSGA II، زمانبر است، تابع چندهدفه حاصل با استفاده از الگوریتم بهینه‌یابی کمینه بیشینه حل شد. در این حالت، خطای تعیین وضعیت با روش پیشنهادی نسبت به روش کواترنیون، (۷ برابر) کاهش یافته است، و از وابستگی آن به دقت بردارهای ورودی (حدود ۲۰۰ برابر) کاسته است. در واقع، ضمن کاهش میانگین خطا، قوام الگوریتم نسبت به عدم قطعیت‌های موجود در بردارهای ورودی افزایش یافته است. استفاده از الگوریتم کمینه بیشینه، زمان اجرای الگوریتم NSGA II حدود ۶۰۰ برابر کاهش داده است و مناسب کاربردهای به هنگام است. عملکرد روش پیشنهادی برای حرکت در مدار یک ماهواره، مورد بررسی قرار گرفته است. براساس نتایج، روش پیشنهادی دارای کران‌های کوچکتری نسبت به روش کواترنیون است، به طوری که میانگین مربعات خطا (RMS) بیش از ۵۰٪ کاهش یافته است.



علامت و اختصارات	توضیح
$\alpha$	ضریب عدم قطعیت بردار اندازه‌گیری
$\alpha_j$	ضریب عدم قطعیت در راستای بردار مولد $b_j^f$
$\beta$	ضریب عدم قطعیت بردار مرجع
$\beta_j$	ضریب عدم قطعیت در راستای بردار مولد $r_j^f$
$\lambda$	مقدار ویژه
$\lambda_i$	ضرایب وزنی مسئله نیل به آرمان
$[\alpha]$	ماتریس قطری ضرایب عدم قطعیت بردار اندازه‌گیری
$[\beta]$	ماتریس قطری ضرایب عدم قطعیت بردار مرجع
$\theta\delta$	خطای زاویه اوپلر
$Z_i^*$	نقطه آرمانی برای تابع هدف $L$
$Z_{\Delta L}^*$	نقطه آرمانی برای تابع هدف $L\Delta$
نماد	
$A$	ماتریس وضعیت
$A_{exact}$	ماتریس وضعیت مطلوب
$A_{estimated}$	ماتریس وضعیت تخمین زده شده
$\Delta A$	خطای ماتریس وضعیت
$a_i$	ضریب وزنی
$b^l$	بردار اندازه‌گیری بازه‌ای
$b_i$	بردار اندازه‌گیری
$b_i^m$	مقدار میانی بردار اندازه‌گیری بازه‌ای
$\Delta b_i$	عدم قطعیت بردار اندازه‌گیری بازه‌ای
$b^r$	شعاع بردار اندازه‌گیری بازه‌ای
$b_j^f$	بردار مولد عدم قطعیت بردار اندازه‌گیری
$b^{exact}$	مقادیر نامی بردار اندازه‌گیری
$b^{perturbed}$	مقادیر اغتشاشی بردار اندازه‌گیری
$G$	ماتریس شکل بردارهای اندازه‌گیری
$H$	ماتریس شکل بردارهای مرجع
$K$	ماتریس $4 \times 4$ مسئله وهبا
$K^m$	مقدار میانی ماتریس وهبا
$K^{\Delta b}$	عدم قطعیت ماتریس مسئله وهبا ناشی از عدم قطعیت بردار اندازه‌گیری
$K^{\Delta r}$	عدم قطعیت ماتریس مسئله وهبا ناشی از عدم قطعیت بردار مرجع
$K^{\Delta b, \Delta r}$	عدم قطعیت ماتریس مسئله وهبا ناشی از عدم قطعیت بردار اندازه‌گیری و مرجع
$L$	تابع هدف مسئله وهبا
$L^m$	مقدار میانی تابع هدف مسئله وهبا
$\Delta L$	خطای تابع هدف مسئله وهبا
$q$	بردار کواترنیون
$q^{exact}$	بردار کواترنیون مطلوب
$r_i$	بردار مرجع
$r^l$	بردار مرجع بازه‌ای
$r_i^m$	مقدار میانی بردار مرجع بازه‌ای
$\Delta r_i$	عدم قطعیت بردار مرجع
$r^r$	شعاع بردار مرجع بازه‌ای
$r_j^f$	بردار مولد عدم قطعیت بردار مرجع
$tr$	مجموع دارایی‌های روی قطر اصلی ماتریس
$W$	ماتریس وزنی
$x^l$	متغیر بازه‌ای
$x^m$	مقدار میانی متغیر بازه‌ای
$x^r$	شعاع متغیر بازه‌ای
$\varphi, \theta, \psi$	زوایای اوپلر

## ۱- مقدمه

یکی از زیرسیستم‌های اصلی و مهم ماهواره، زیرسیستم تعیین وضعیت است. تعیین وضعیت فرآیندی برای تشخیص وضعیت فضاپیما نسبت به یک دستگاه مرجع اینرسی است. سیستم تعیین وضعیت، ورودی‌های سیستم کنترل را تأمین می‌کند. بنابراین هر چه داده‌های خروجی این سیستم دقیق‌تر باشد، کنترل مطلوبتری خواهیم داشت. از طرفی تخمین با استفاده از اندازه‌گیری‌های نوپزی صورت می‌پذیرد که توسط حسگرهایی نظیر حسگر خورشید، مغناطیس‌سنج، شتاب‌سنج، ژيروسکوپ و... به دست می‌آیند. از اینرو، دقت، قوام و سرعت انجام محاسبات یا به عبارتی هزینه محاسباتی، سه مشخصه بسیار مهم هر سیستم تعیین وضعیت است. بنابراین در مسئله تعیین وضعیت سعی بر این است که با اندازه‌گیری‌های نوپزی این سه مشخصه محقق شود.

فرآیند طراحی این زیرسیستم دارای پیشینه طولانی است، لیکن، توسعه ماهواره‌های کوچک و محدودیت‌های متعدد ناشی از قیود فیزیکی اعمال شده بر روی آن‌ها، طراحی این زیرسیستم را تحت تأثیر قرار داده است و چالش‌های جدیدی را فراهم آورده است. از جمله این محدودیت‌ها می‌توان به محدودیت در تولید توان مورد نیاز و حجم محدود در دسترس اشاره کرد. از طرفی استفاده از حسگرهای ارزان‌قیمت با وزن و مصرف انرژی کمتر چالش‌هایی نیز به همراه دارد. مهمترین چالش در این زمینه، دقت کمتر اندازه‌گیری‌های این حسگرها نسبت به دیگر انواع حسگرهاست.

مباحث مربوط به تشخیص نحوه قرارگیری ماهواره نسبت به یک دستگاه مرجع با عناوین تعیین وضعیت (Attitude determination) و تخمین وضعیت (Attitude estimation) شناخته می‌شوند. تعیین وضعیت به رویکردهای بدون حافظه‌ای اشاره دارد که وضعیت سیستم را نقطه به نقطه در هر گام زمانی تعیین می‌کنند. اغلب این روش‌ها خصوصیات احتمالاتی اندازه‌گیری‌های وضعیت را به حساب نمی‌آورند. تخمین وضعیت به رویکردهای حافظه‌دار اشاره دارد. رویکرد حافظه‌دار به معنای استفاده از مدل دینامیکی حرکت سیستم در ساختار فیلتر است، به طوری که داده‌های اندازه‌گیری شده در طول زمان به منظور استفاده در تخمین حفظ می‌شوند [۱]. از جمله روش‌های تخمین وضعیت می‌توان به فیلتر کالمن اشاره نمود.

دسته‌ای از روش‌های تعیین وضعیت ماهواره، با نام روش‌های نقطه به نقطه یا تک-نقطه‌ای شناخته می‌شوند. از جمله این روش‌ها می‌توان به روش‌های حداقل مربعات، روش کواترنیون،

روش تخمین کواترنیون [۲، ۳]، روش تخمینگر بهینه کواترنیون [۴-۶]، تجزیه مقادیر منفرد [۷]، روش ماتریس وضعیت بهینه [۸] و روش تخمینگر ماتریس وضعیت خطی سریع [۹] اشاره کرد. تعیین وضعیت با این روش‌ها منجر به حل مسئله وهبا می‌شود. این روش‌ها همانطور که از نامشان پیداست تنها از داده‌های زمان حال برای تعیین وضعیت استفاده می‌کنند. خصوصیت دیگر روش‌های نقطه به نقطه، عدم استفاده از مدل دینامیکی سیستم برای تعیین وضعیت می‌باشد. به همین دلیل، با نام الگوریتم‌های استاتیکی نیز شناخته می‌شوند. این روش‌ها از تمامی بردارهای اندازه‌گیری در همان گام زمانی استفاده می‌کنند. این روش‌ها دارای زمان اجرای کمتر نسبت به دیگر روش‌ها هستند و مستقل از دینامیک سیستم می‌باشند و ماهیتی غیرخطی دارند. دسته دیگر روش‌های تعیین وضعیت، رویکردهای بازگشتی هستند که تمامی داده‌های قبلی را بدون بکارگیری دینامیک سیستم در نظر می‌گیرند که از آن جمله می‌توان به روش بازگشتی تخمین کواترنیون [۱۰]، تخمین کواترنیون بازگشتی بهینه [۱۱]، تخمین کواترنیون تعمیم یافته [۱۲] و فیلتر بازگشتی وضعیت بهینه ترتیبی [۱۳] اشاره کرد.

رویکرد دیگر در استفاده از روش‌های نقطه به نقطه با نام روش‌های تعیین وضعیت غیرسنتی (nontraditional) شناخته می‌شوند. در واقع این روش‌ها ترکیبی از روش‌های نقطه به نقطه و روش‌های تخمین وضعیت نظیر فیلتر کالمن هستند. در این روش‌ها در هر گام زمانی، زوایای اوپلر با استفاده یکی از روش‌های نقطه به نقطه محاسبه می‌شوند. سپس این زوایا به عنوان مدل مشاهده در فیلتر کالمن به کار گرفته می‌شوند. از جمله روش‌های نقطه به نقطه مورد استفاده می‌توان به روش تخمین کواترنیون [۱۴] و روش تجزیه مقادیر منفرد [۱۵-۱۶] اشاره کرد. مزیت اصلی این روش‌ها، کاهش بار محاسباتی به دلیل خطی بودن مدل مشاهده، و قوام نسبت به از دست رفتن اندازه‌گیری‌هاست [۱۷].

روش‌های نقطه به نقطه به داده‌های مربوط به برخی کمیت‌های برداری نظیر میدان مغناطیسی زمین، بردار جهت خورشید و... در دو مرجع مختلف احتیاج دارند. علاوه بر حسگرها که دارای خطاهایی نظیر ناهمراستایی، بایاس، نویز و... هستند، مدل‌های استخراج شده از کمیت‌های مربوط به آن‌ها نیز دارای نامعینی هستند. از اینرو، با افزایش سطح عدم قطعیت‌ها، دقت تعیین وضعیت با روش‌های استاتیکی کاهش می‌یابد. به طور مثال، میدان مغناطیسی زمین را می‌توان با

وهبا براساس فرمولبندی لاسو (Lasso) ارائه و یک حل بسته بهینه از آن معرفی نموده است.

نوآوری این پژوهش در نظر گرفتن عدم قطعیت‌های موجود در بردارهای ورودی در مسئله وهبا و استخراج فرآیندی چندهدفه به منظور کاهش خطای تعیین وضعیت در حضور خطای بردارهای ورودی است. نوآوری دوم، بهره‌گیری از حساب بازه‌ای به عنوان ابزاری کاربردی در مدل‌سازی این عدم قطعیت‌هاست. استفاده از حساب بازه‌ای این امکان را در اختیار می‌گذارد که با رویکردی غیراحتمالاتی و بدون اطلاع از نوع توزیع عدم قطعیت‌ها و تنها با دانستن کران‌هایشان، آنها را مدل‌سازی کرد. نوآوری سوم بهبود عملکرد روش پیشنهادی برای کاربردهای برخط، با به کارگیری الگوریتم بهینه‌یابی مناسب است. همانطور که در انتهای بخش ۳ مقاله اثبات شده است، نقطه آرمانی برای هر دو تابع هدف عدد صفر است. این خصوصیت بیانگر مواجهه با یک مسئله نیل به آرمان است. بنابراین با انتخاب الگوریتم بهینه‌یابی کمینه بیشینه که نوع خاصی از یک مسئله نیل به آرمان است، ضمن حفظ خصوصیت کمینه بودن خطای تعیین وضعیت روش پیشنهادی، زمان اجرای آن بسیار کاهش یافته است، به طوری که برای کاربردهای برخط مناسب است.

با اعمال و در نظر گرفتن عدم قطعیت‌ها در مسئله وهبا، دقت تعیین وضعیت بهبود یافته است، به طوری که RMS خطای تخمین کاهش می‌یابد. در روش پیشنهادی علاوه بر کمینه‌یابی تابع هدف مرسوم در مسئله وهبا، تغییرات تابع هدف براساس مدل استخراج شده نیز کمینه‌یابی می‌شود. این بدان معناست که پاسخ-های ارائه شده دارای خطای کمینه هستند.

این مقاله بدین صورت سازماندهی شده است که ابتدا به کمک حساب بازه‌ای، نامعینی‌های مدل‌سازی شده و در مسئله وهبا در نظر گرفته می‌شوند سپس مسئله وهبا به صورت یک مسئله بهینه‌سازی چندهدفه بازنویسی و با استفاده از یک حلگر چند هدفه حل می‌شود.

## ۲- تعریف مسئله

اساس و بنیاد اکثر الگوریتم‌های تعیین وضعیت تک نقطه‌ای، مسئله وهبا است. مسئله وهبا یک مسئله حداقل مربعات وزن‌دار و غیرخطی برای تعیین ماتریس وضعیت بهینه به کمک مجموعه‌ای از حداقل دو بردار اندازه‌گیری مستقل است. تابع

مغناطیس‌سنجی که روی بدنه ماهواره نصب می‌شود، اندازه‌گیری کرد. این اندازه‌گیری‌ها خود دارای عدم قطعیت هستند، به طوری که شامل خطاهای نصب، نویز، ناهمراستایی، بایاس و خطاهای ناشی از میدان‌های مغناطیسی اطراف و ... می‌شوند. از طرفی همیشه یک خطا بین میدان مغناطیسی محاسبه شده با استفاده از مدل‌های میدان مغناطیسی زمین از جمله مدل IGRF و WMM با مقادیر واقعی وجود دارد که حدود ۲۰ درصد برآورد شده است. اگر مدل‌هایی با مرتبه پایین‌تر استفاده شود، ۱۰ درصد به مقدار این خطا افزوده می‌شود. تمام این قبیل نامعینی‌ها باعث خطای تعیین وضعیت می‌شوند. با در نظر گرفتن یک عدم قطعیت برابر ۳۰ درصد مقدار نامی بردارهای اندازه‌گیری، الگوریتم‌های تعیین وضعیت استاتیکی مرسوم دارای خطاهای بزرگی خواهند شد. بنابراین هنگامی که نامعینی‌ها بزرگ‌اند، بررسی قوام سیستم تعیین وضعیت یک نیازمندی اساسی به حساب می‌آید.

اگرچه خطای تعیین وضعیت با روش‌های نقطه به نقطه وابسته به خطاهای مدل‌سازی و اندازه‌گیری است، لیکن، نامعینی‌های مدل‌سازی و اندازه‌گیری به طور مستقیم در مسئله وهبا در نظر گرفته نمی‌شوند. به طوری که هر چه خطای اندازه‌گیری‌ها بیشتر باشد، متناسب با آن خطای تعیین وضعیت نیز افزایش خواهد یافت. این کاستی هنگامی بحرانی‌تر می‌شود که از سنسورهای ارزان‌قیمت برای اندازه‌گیری استفاده شود.

روش‌های کمی در تحقیقات قبلی وجود دارد که این نامعینی‌ها را در نظر می‌گیرند. احمد و کریگان [۱۸] مسئله وهبا را به صورت یک مسئله بهینه‌سازی کمینه-بیشینه با استفاده از نرم بینهایت نامعینی‌ها بازنویسی کردند. سپس با جایگزینی نرم بینهایت با یک کران بالا، مسئله بهینه‌سازی را به یک مسئله کمینه‌سازی نزدیک بهینه تبدیل نمودند. روش پیشنهادی دارای یک تابع هدف و قید درجه دو است. در مرجع [۱۹]، این مسئله کمینه‌سازی تقریب زده شده، به یک مسئله برنامه‌ریزی نیمه معین با تابع هدف خطی و قیود ناتساوی ماتریسی خطی، تعمیم یافته است. در مرجع [۲۰] مسئله وهبا با استفاده از روش حداقل مربعات کوتاه‌شده بازنویسی شده است و به یک مسئله برنامه‌ریزی درجه دو مقید تبدیل شده است. سپس مسئله وهبا در حضور تعداد زیادی از داده‌های خارج از محدوده (Outlier) حل شده است. مرجع [۲۱] یک تخمینگر هندسی مبتنی بر مسئله وهبا برای مواجهه با ورودی‌هایی با نرخ‌های متفاوت با استفاده از تحلیل پایداری لیاپانوف ارائه نموده است. مرجع [۲۲] تعمیمی از مسئله

دارای چهار مقدار ویژه و چهار بردار ویژه متناظر با آن‌ها می‌باشد که تنها یکی از آنها بردار کوانترنیوم مربوط به وضعیت بهینه است. بردار ویژه متناظر با بزرگترین مقدار ویژه ماتریس  $K$ ، تخمین بهینه حداقل مربعات از وضعیت می‌باشد. از جمله خصوصیات و مزایای روش  $q$ ، مقاوم بودن آن است [۲]. همچنین این روش، مسئله غیرخطی و هبا را به طور مستقیم و بدون هیچ‌گونه خطی‌سازی با فرض‌های ساده‌کننده حل می‌نماید.

روش‌های نقطه به نقطه مبتنی بر معادله (۱) برای تعیین ماتریس دوران، نیازمند کمیت‌های برداری هم در دستگاه بدنی و هم در دستگاه مرجع هستند. از اینرو تنها از سنسورهایی می‌توان بهره برد که داده‌های مربوط به کمیت اندازه‌گیری شده آن در دستگاه مرجع موجود است. از آن جمله می‌توان به مغناطیس‌سنج، سنسور خورشیدی، و سنسور ستاره‌ای اشاره کرد. بنابراین خطای تعیین وضعیت در این روش‌ها، هم وابسته به خطاهای اندازه‌گیری و هم خطای مدل مرجع است. تحلیل خطای مسئله و هبا با مدل خطاهای احتمالاتی در مراجع [۱، ۳، ۷، ۲۵، ۲۶] ارائه شده است.

## ۲- مدل‌سازی عدم قطعیت‌ها

حساب بازه‌ای دارای خصوصیتی است که امکان بررسی عدم قطعیت‌ها را فراهم می‌کند. مفهوم بازه‌ها را می‌توان روی هر کمیت نامعینی، پیاده‌سازی نمود. از اینرو، هر مقدار حقیقی  $x$  متعلق به بازه  $x^l$  را می‌توان به صورت زیر بیان نمود [۲۷]:

$$x = x^m + \alpha x^r, \quad \alpha \in [-1 \quad 1] \quad (۳)$$

$x^m$  و  $x^r$  مرکز و شعاع بازه  $x^l$  هستند.  $\alpha$  مقداری حقیقی در بازه  $-1$  تا  $1$  است. با توجه به اینکه مقادیر اندازه‌گیری شده و مرجع می‌توانند دارای خطا و عدم قطعیت باشند، با تعمیم رابطه (۳) برای بردارها، می‌توان آن‌ها را به کمک حساب بازه‌ای به صورت زیر در نظر گرفت:

$$b_i = mid(b^l) + \Delta b = b^m + \sum_{j=1}^3 \alpha_j b_j^r$$

$$= b^m + [\alpha] b^r, \quad \alpha_j \in [-1 \quad 1]$$

$$r_i = mid(r^l) + \Delta r = r^m + \sum_{j=1}^3 \beta_j r_j^r \quad (۴)$$

عملکردی که در این مسئله باید کمینه شود به صورت زیر تعریف می‌شود [۲۳]:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N a_i \|b_i - A r_i\|^2 \quad (۱)$$

$a_i$ ، ضریب وزنی و عددی مثبت و اسکالر است.  $N$ ، تعداد مشاهدات،  $A$  ماتریس وضعیت، و  $b_i$  و  $r_i$  به ترتیب بردار اندازه‌گیری و بردار مرجع هستند. مسئله و هبا این قابلیت را دارد که هر تعداد از بردارهای اندازه‌گیری نویزی که به طور همزمان محاسبه می‌شوند را برای به‌دست‌آوردن وضعیت بهینه پردازش کند. توانایی این روش در ارائه پاسخ‌های بهینه سراسری بدون هیچ‌گونه خطی‌سازی و فرض‌های محدودکننده مانند در نظر گرفتن زوایای کوچک، موجب توجه بسیاری از پژوهشگران به آن شده است.

راه‌حل‌های بسیاری برای مسئله و هبا ارائه شده است. در اکثر راه‌حل‌های این مسئله، تابع عملکرد به شکلی دیگر بیان می‌شود. رویکردی کاربردی در این زمینه استفاده از کوانترنیوم‌ها برای نمایش تابع عملکرد است. داوونپورت [۲۴] نشان داد که استفاده از کوانترنیوم‌ها برای بیان تابع عملکرد مسئله و هبا، منجر به تابع عملکردی درجه دو می‌شود و پاسخ بهینه آن با حل مسئله مقادیر ویژه زیر به دست می‌آید.

$$Kq = \lambda q$$

$$K = \begin{bmatrix} B + B^T - tr(B)I_3 & Z \\ Z^T & tr(B) \end{bmatrix} \quad (۲)$$

$$B = \sum_{i=1}^N a_i b_i r_i^T$$

$$Z = \sum_{i=1}^N a_i (b_i \times r_i)$$

در رابطه (۲)،  $\lambda$  مقدار ویژه،  $q$  بردار ویژه متناظر با آن، و  $K$  ماتریسی متقارن و  $4 \times 4$  است. حل داوونپورت که با عنوان روش  $q$  شناخته می‌شود، کوانترنیوم‌های وضعیت را به جای ماتریس وضعیت محاسبه می‌کند. همانطور که از رابطه (۲) مشخص است، بردار کوانترنیوم، یک بردار ویژه برای ماتریس  $K$  می‌باشد. وضعیت بهینه موردنظر معادل بردار ویژه ماتریس  $K$  است. ماتریس  $K$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i [(b_i^m + \Delta b_i)^T (b_i^m + \Delta b_i) \\
 &\quad - (b_i^m + \Delta b_i)^T A(r_i^m + \Delta r_i) \\
 &\quad - (r_i^m + \Delta r_i)^T A^T (b_i^m + \Delta b_i) \\
 &\quad + (r_i^m + \Delta r_i)^T A^T A (r_i^m + \Delta r_i)] \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i [b_i^{mT} b_i^m + b_i^{mT} \Delta b_i + \Delta b_i^T b_i^m + \Delta b_i^T \Delta b_i \\
 &\quad - 2(b_i^{mT} A r_i^m + b_i^{mT} A \Delta r_i \\
 &\quad + \Delta b_i^T A r_i^m + \Delta b_i^T A \Delta r_i) + r_i^{mT} r_i^m \\
 &\quad + r_i^{mT} \Delta r_i + \Delta r_i^T r_i^m + \Delta r_i^T \Delta r_i] \\
 L &= - \sum_{i=1}^n a_i (b_i^{mT} A r_i^m) - \sum_{i=1}^n a_i (b_i^{mT} A \Delta r_i) \\
 &\quad - \sum_{i=1}^n a_i (\Delta b_i^T A r_i^m) \\
 &\quad - \sum_{i=1}^n a_i (\Delta b_i^T A \Delta r_i) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i (b_i^{mT} b_i^m + r_i^{mT} r_i^m) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i (\Delta b_i^T \Delta b_i + \Delta r_i^T \Delta r_i) \\
 &\quad + \sum_{i=1}^n a_i (b_i^{mT} \Delta b_i + r_i^{mT} \Delta r_i)
 \end{aligned}$$

تابع هدف  $L$  یک تابع بازه‌ای است. بنابراین هر تابع حقیقی متعلق به آن را می‌توان براساس رابطه (۳) به صورت دو تابع هدف مجزا به صورت زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned}
 L(A) &= L^m + \Delta L \\
 \Delta L &= \Delta L_1 + \Delta L_2 + \Delta L_3 + \Delta L_4 + \Delta L_5 \\
 L^m &= - \sum_{i=1}^N a_i (b_i^{mT} A r_i^m) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N a_i (b_i^{mT} b_i^m + r_i^{mT} r_i^m)
 \end{aligned}$$

$$= r^m + [\beta] r^r, \beta_j \in [-1 \quad 1]$$

$b_i$  و  $r_i$  بردارهای حقیقی متعلق به بازه‌های  $b^l$  و  $r^l$  هستند.  $\Delta b$  و  $\Delta r$  نامعینی‌های کراندار هستند. پارامترهای  $b_j^r$  و  $r_j^r$  بیانگر بردارهایی هستند که تمامی المان‌های آن‌ها به غیر از  $j$ -امین المان، صفر است.  $\alpha_j$  و  $\beta_j$  ضرایب اسکالر هستند.  $r^r$  و  $b^r$  شعاع بازه خطای  $b^l$  و  $r^l$  هستند. با توجه به اینکه اندازه‌گیری در هر راستا مستقل از دیگر راستاها در نظر گرفته شده است، ماتریس‌های  $[a]$  و  $[\beta]$  ماتریس همانی هستند. بردارهای  $b_i$  و  $r_i$  بردارهایی نرمالیزه شده هستند. بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
 1 &= \|b_i^m + \Delta b_i\|^2 \\
 &= b_i^{mT} b_i^m + 2b_i^{mT} \Delta b_i + \Delta b_i^T \Delta b_i \\
 1 &= \|r_i^m + \Delta r_i\|^2 \\
 &= r_i^{mT} r_i^m + 2r_i^{mT} \Delta r_i + \Delta r_i^T \Delta r_i
 \end{aligned}$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
 b_i^{mT} \Delta b_i &= \frac{1}{2} (1 - b_i^{mT} b_i^m - \Delta b_i^T \Delta b_i) \\
 r_i^{mT} \Delta r_i &= \frac{1}{2} (1 - r_i^{mT} r_i^m - \Delta r_i^T \Delta r_i)
 \end{aligned} \tag{۵}$$

### ۳- تعیین وضعیت بهینه مقاوم مبتنی بر حساب بازه‌ای

اگر چه خطای تعیین وضعیت با روش‌های نقطه به نقطه وابسته به خطاهای مدل‌سازی و اندازه‌گیری است، لیکن، نامعینی‌های مدل‌سازی و اندازه‌گیری به طور مستقیم در مسئله وهبا در نظر گرفته نشده است. بنابراین می‌توان این نامعینی‌ها را با استفاده از رابطه (۴) مدل‌سازی، و مسئله وهبا را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i [(b_i^m + \Delta b_i) - A(r_i^m + \Delta r_i)]^T [(b_i^m + \Delta b_i) - A(r_i^m + \Delta r_i)]$$



$$\Delta L_3 = - \sum_{i=1}^N a_i (\Delta b_i^T A \Delta r_i)$$

در اینجا  $\sum_{i=1}^N a_i = 1$  در نظر گرفته می‌شود. با تبدیل رابطه (۶) به یک تابع مرتبه دو از کوواترینون‌ها خواهیم داشت [۲۸]:

$$L(A) = L^m + \Delta L$$

$$L^m = 1 - q^T K^m q$$

$$\Delta L = -q^T K^{\Delta r} q - q^T K^{\Delta b} q - q^T K^{\Delta r, \Delta b} q$$

$$K^m = \begin{bmatrix} B^m + B^{mT} - \text{tr}(B^m)I_3 & Z^m \\ Z^{mT} & \text{tr}(B^m) \end{bmatrix} \quad (۷)$$

$$K^{\Delta r} = \begin{bmatrix} B_{\Delta r} + B_{\Delta r}^T - \text{tr}(B_{\Delta r})I_3 & Z_{\Delta r} \\ Z_{\Delta r}^T & \text{tr}(B_{\Delta r}) \end{bmatrix}$$

$$K^{\Delta b}$$

$$= \begin{bmatrix} B_{\Delta b} + B_{\Delta b}^T - \text{tr}(B_{\Delta b})I_3 & Z_{\Delta b} \\ Z_{\Delta b}^T & \text{tr}(B_{\Delta b}) \end{bmatrix}$$

$$K^{\Delta r, \Delta b}$$

$$= \begin{bmatrix} B_{\Delta r, \Delta b} + B_{\Delta r, \Delta b}^T - \text{tr}(B_{\Delta r, \Delta b})I_3 & Z_{\Delta r, \Delta b} \\ Z_{\Delta r, \Delta b}^T & \text{tr}(B_{\Delta r, \Delta b}) \end{bmatrix}$$

ماتریس‌های  $B$  و  $Z$  برای هر یک از ماتریس‌های  $K$  به صورت زیر تعیین می‌شوند:

$$B^m = \sum_{i=1}^n a_i b_i^m r_i^{mT} = B^m W R^{mT}$$

$$Z^m = \sum_{i=1}^n a_i (b_i^m \times r_i^m) = (B^m \times R^m) W$$

$$B_{\Delta b} = \sum_{i=1}^n a_i \Delta b_i r_i^{mT} = G[\alpha] B^r W R^{mT}$$

$$Z_{\Delta b} = \sum_{i=1}^n a_i (\Delta b_i \times r_i^m) = (G[\alpha] B^r \times R^m) W$$

$$\Delta L_1 = - \sum_{i=1}^N a_i (b_i^{mT} A \Delta r_i)$$

$$\Delta L_2 = - \sum_{i=1}^N a_i (\Delta b_i^T A r_i^m)$$

$$\Delta L_3 = - \sum_{i=1}^N a_i (\Delta b_i^T A \Delta r_i)$$

$$\Delta L_4 = \sum_{i=1}^N a_i (b_i^{mT} \Delta b_i + r_i^{mT} \Delta r_i)$$

$$\Delta L_5 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N a_i (\Delta b_i^T \Delta b_i + \Delta r_i^T \Delta r_i)$$

در اینجا  $L^m$  و  $\Delta L$  نقطه میانی و نامعینی کراندار تابع هدف هستند. با جایگزینی رابطه (۵) در  $\Delta L_4$  خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \Delta L_4 = & \sum_{i=1}^N a_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N a_i (b_i^{mT} b_i^m \\ & + r_i^{mT} r_i^m) \\ & - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N a_i (\Delta b_i^T \Delta b_i \\ & + \Delta r_i^T \Delta r_i) \end{aligned}$$

بنابراین تابع هزینه به صورت زیر بازنویسی خواهد شد:

$$L(A) = L^m + \Delta L$$

$$\Delta L = \Delta L_1 + \Delta L_2 + \Delta L_3$$

$$L^m = \sum_{i=1}^N a_i - \sum_{i=1}^N a_i (b_i^{mT} A r_i^m)$$

$$\Delta L_1 = - \sum_{i=1}^N a_i (b_i^{mT} A \Delta r_i) \quad (۶)$$

$$\Delta L_2 = - \sum_{i=1}^N a_i (\Delta b_i^T A r_i^m)$$

مسئله بهینه‌یابی کمینه بیشینه به دنبال یافتن نقطه‌ای است که بیشینه یک مجموعه از توابع را کمینه کند. یک مسئله کمینه بیشینه با تبدیل به یک مسئله نیل به آرمان (goal attainment) حل می‌شود. در این روش، یک نقطه آرمانی برای هر تابع هدف تعریف شده و هر پاسخی که فاصله کمتری تا آن داشته باشد پاسخ بهتری خواهد بود. در این حالت مسئله بهینه‌سازی چندهدفه به صورت زیر تبدیل می‌شود [۳۱]:

$$\begin{aligned} \min g(x | \lambda, z^*) &= \|f(x) - z^*\|_{p,\lambda} \\ &= \sqrt[p]{\sum_{i=1}^m \lambda_i |f_i(x) - z_i^*|^p} \end{aligned}$$

$z_i^*$  نقطه آرمانی هر تابع هدف است.  $\lambda_i$  ضریب وزنی و  $f_i(x)$  معرف توابع هدف است. برای نرم بینهایت خواهیم داشت:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} g(x | \lambda, z^*, p) = \max \lambda_i |f_i(x) - z_i^*|$$

در الگوریتم کمینه بیشینه، نقطه آرمانی و ضرایب وزنی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$z_i^* = 0$$

$$\lambda_i = 1$$

از آنجا که کمینه کردن تغییرات تابع هدف ( $\Delta L$ ) به معنای صفر کردن آن است، بنابراین نقطه آرمانی برای آن، برابر صفر ( $z_{\Delta L}^* = 0$ ) است. همچنین می‌توان نشان داد که نقطه آرمانی برای تابع هدف  $L^m$  نیز مقدار صفر است. از اینرو، رابطه زیر را در نظر بگیرید

$$L^m = \sum_{i=1}^N a_i - q^T K^m q \quad (۸)$$

با جایگذاری رابطه (۲) در رابطه (۸) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} L^m &= \sum_{i=1}^N a_i - q^T \lambda q = \sum_{i=1}^N a_i - \lambda q^T q \\ &= \sum_{i=1}^N a_i - \lambda \end{aligned}$$

مرجع [۳] نشان داده است که مقدار  $\lambda$  بسیار نزدیک به مقدار  $\sum_{i=1}^N a_i$  است و معادل مقدار ویژه بیشینه ماتریس  $K^m$  است. بنابراین می‌توان نقطه آرمانی برای تابع هدف  $L^m$  را صفر در نظر گرفت و از الگوریتم بهینه‌یابی کمینه بیشینه برای حل رابطه (۷) استفاده کرد.

$$B_{\Delta r} = \sum_{i=1}^n a_i b_i^m \Delta r_i^T = B^m W R^T [\beta]^T H^T$$

$$Z_{\Delta r} = \sum_{i=1}^n a_i (b_i^m \times \Delta r_i) = (B^m \times H[\beta] R^T) W$$

$$B_{\Delta r, \Delta b} = \sum_{i=1}^n a_i \Delta b_i \Delta r_i^T = G[\alpha] B^r W R^T [\beta]^T H^T$$

$$\begin{aligned} Z_{\Delta r, \Delta b} &= \sum_{i=1}^n a_i (\Delta b_i \times \Delta r_i) \\ &= (G[\alpha] B^r \times H[\beta] R^T) W \end{aligned}$$

در این حالت کمینه‌یابی تابع هدف  $L(A)$ ، معادل کمینه‌یابی همزمان توابع هدف  $L^m$  و  $\Delta L$  در حضور ورودی‌های دارای نامعینی است. بنابراین مسئله مورد بررسی از یک مسئله بهینه‌سازی تک‌هدفه به یک مسئله بهینه‌سازی چندهدفه تبدیل می‌شود. از آنجا که یکی از اهداف، کمینه‌یابی تغییرات تابع هدف ( $\Delta L$ ) است، بنابراین مسئله مورد بررسی، یک مسئله بهینه‌سازی چندهدفه مقاوم خواهد بود.

در یک مسئله بهینه‌سازی چندهدفه، دو یا چند تابع هدف به طور همزمان بهینه‌یابی می‌شوند. دلیل اصلی برای استفاده از بهینه‌سازی چندهدفه اینست که عملکرد یک سیستم چندموضوعی، علاوه بر عملکرد هر یک از اهداف، از اثرات متقابل آن‌ها نیز تأثیر می‌پذیرد. با در نظر گرفتن این اثرات متقابل می‌توان عملکرد کلی سیستم را بهبود بخشید. در یک مسئله بهینه‌سازی چندهدفه مقاوم سعی می‌شود نوسانات عملکرد کلی سیستم در حضور عدم قطعیت‌ها کمینه نماید. در مسئله مورد بررسی، این امر توسط بهینه‌یابی همزمان توابع هدف رابطه (۷) انجام می‌شود.

در مرجع [۲۹-۳۰] به کمک یک حلگر چندهدفه (NSGA II) رابطه (۷) حل شده است. سپس با تعریف معیار کمینه خطای تعیین وضعیت، پاسخی از بین پاسخ‌های بهینه به دست آمده در جبهه پارتو به عنوان پاسخ ترجیحی انتخاب شده است. با وجود اینکه به کمک الگوریتم به کار رفته، حل مسئله وهبا بهبود یافته است، لیکن به دلیل استفاده از یک الگوریتم اکتشافی، زمان رسیدن به پاسخ افزایش یافته است. در این مقاله، به منظور حل این کاستی، از الگوریتم کلاسیک بهینه‌یابی کمینه بیشینه برای حل مسئله چندهدفه استفاده شده است.

#### ۴- شبیه سازی

در این بخش، ابتدا عملکرد روش پیشنهادی در یک گام زمانی مشخص بررسی می‌شود. سپس عملکرد آن در حرکت مداری مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.

مدل مرجع و لندازه‌گیری‌های حسگر به دلیل وجود نویز و ناهمراستایی و همچنین تقریب‌های ساده‌کننده برای مدل‌سازی، دقیق نیستند. از اینرو، برای مدل‌سازی این نامعینی‌ها، یک خطای تصادفی کراندار در محدوده  $\pm b^T$  و  $\pm r^T$  با توزیع یکنواخت به مقادیر دقیق بردارهای مرجع و لندازه‌گیری اضافه شده است. بردارهای اندازه‌گیری در این پژوهش، خروجی حسگرهای خورشید و مغناطیس‌سنج در نظر گرفته شده‌اند. بردارهای مرجع نیز مدل مغناطیس زمین و بردار خورشید هستند.  $b^T$  و  $r^T$  کران‌های نامعینی در بردارهای مرجع و اندازه‌گیری هستند که ۲۰ درصد مقدار ورودی در نظر گرفته شده‌اند. در این بخش، تأثیر نامعینی داده‌های ورودی بر روی دقت تخمین روش پیشنهادی و روش کواترنیون با استفاده از داده‌های بدست آمده در یک زمان مشخص بررسی می‌شود. جمعیت نخستین کواترنیون‌ها براساس روش تریاد (Triad) تولید شده‌اند. محدوده جستجو ۱۰ درصد مقدار جمعیت اولیه در نظر گرفته شده است.

به منظور یکسان‌سازی معیار مقایسه روش‌ها، معیاری تحت عنوان خطای تعیین وضعیت تعریف شده که به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\theta\delta = \arccos\left(\frac{1}{2}(\text{trace}(\Delta A - 1))\right)$$

در اینجا  $\theta\delta$  بیانگر زاویه اویلر ماتریس  $\Delta A$  است که خطای تعیین وضعیت نامیده می‌شود. ماتریس  $\Delta A$  به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\Delta A = A_{estimated}^T A_{exact}$$

#### ۱-۱- تحلیل عملکرد در یک گام زمانی

مجموعه بردارهای ورودی و بردار وضعیت مربوطه را به صورت زیر در نظر بگیرید [۱۸]:

$$r_1^{exact} = [-0.54 \quad -0.326 \quad 0.775]^T$$

$$b_1^{exact} = [-0.776 \quad -0.46 \quad 0.43]^T$$

$$r_2^{exact} = [-0.673 \quad 0.000133 \quad 0.74]^T \quad (9)$$

$$b_2^{exact} = [-0.927 \quad 0.01 \quad 0.374]^T$$

$$q^{exact} = \begin{bmatrix} -0.9746 \\ 0.0707 \\ -0.2122 \\ -0.0125 \end{bmatrix}$$

به منظور تولید داده‌های نامعین هم در بردارهای اندازه‌گیری و هم در بردارهای مرجع، خطایی تصادفی با توزیع یکنواخت و کراندار به مقادیر دقیق بردارهای ورودی اضافه شده است. سپس به منظور مقایسه دقیق تر، ۱۰۰ داده اغتشاشی تولید شده است و مقدار میانگین و واریانس خطای تعیین وضعیت محاسبه شده است. نتایج حاصل نیز در جدول (۱) ارائه شده است. براساس این نتایج روش پیشنهادی با حلگر NSGA II، در حضور نامعینی‌های کراندار در تمام بردارهای ورودی، دارای میانگین خطای تعیین وضعیت کمتری نسبت به دو روش دیگر است. همچنین، عملکرد مطمئن‌تری نسبت به آن‌ها دارد، زیرا کران‌های خطای تعیین وضعیت آن در محدوده کوچکتری قرار می‌گیرند. لیکن، زمان اجرای آن بسیار بیشتر است.

همانطور که از نتایج مشخص است، دقت تعیین وضعیت با روش کواترنیون وابسته به دقت بردارهای ورودی است. بنابراین هر چه خطای بردارهای ورودی بیشتر باشد دقت تعیین وضعیت نیز به همان نسبت کاهش می‌یابد. در این مثال با تولید ۱۰۰ داده اغتشاشی تصادفی و محاسبه میانگین و واریانس خطای تعیین وضعیت این موضوع نشان داده شده است. مزیت این روش در زمان اجرای کم آن نسبت به روش‌های پیشنهادی است. براساس نتایج، استفاده از الگوریتم بهینه‌یابی کمینه بیشینه برای حل مسئله چندهدفه، زمان اجرا را نسبت به الگوریتم NSGA II بسیار کاهش داده است. لیکن مقدار اندکی از کیفیت پاسخ‌ها کاسته شده است. بیشتر بودن میانگین و واریانس خطا در این روش نسبت به الگوریتم NSGA II، به دلیل ثابت و مشخص بودن ضرایب وزنی در این روش است. لیکن حل حاصل از الگوریتم کمینه-بیشینه دارای میانگین خطای تعیین وضعیت بسیار کمتری نسبت به روش کواترنیون است. همچنین، عملکرد مطمئن‌تری نسبت به آن دارد، زیرا کران‌های خطای تعیین وضعیت آن در محدوده کوچکتری قرار می‌گیرند.

ناهمراستایی و تخمین‌های مرتبه پایین به منظور تهیه مدل، دقیق نیستند و دارای نامعینی هستند. از اینرو، در این پژوهش تمامی خطاها به کمک حساب بازه‌ای، نامعین و کراندار در نظر گرفته شده‌اند. کران‌های خطای اندازه‌گیری مغناطیس‌سنج  $\pm 0.5$  درجه، و کران‌های خطای اندازه‌گیری‌های حسگر خورشید  $\pm 0.005$  درجه در نظر گرفته شده است. تعیین وضعیت برای ۲۰ دقیقه حرکت ماهواره در مدار با استفاده از روش پیشنهادی انجام شده است.

در شکل‌های (۱)، (۲) و (۳) نتایج تخمین زوایای اوپلر به کمک روش کواترنیون و روش پیشنهادی نشان داده شده است. براساس نتایج، تعیین وضعیت به کمک روش کواترنیون، به دلیل اثرپذیری از خطای بردارهای ورودی، دارای دقت کمتری است و روش پیشنهادی عملکرد بهتری دارد، به طوری که خطای وضعیت در روش پیشنهادی دارای کران‌های کوچکتری نسبت به روش کواترنیون است. در این شکل، نمودار سبز، قرمز و آبی رنگ به ترتیب بیانگر خطای تعیین وضعیت روش کواترنیون و روش پیشنهادی و مقدار نامی است. در شکل ۴، ریشه میانگین مجذور (rms) خطای تعیین وضعیت روش پیشنهادی و روش کواترنیون نشان داده شده است. همانطور که مشخص است مقدار rms خطای تعیین وضعیت در روش پیشنهادی بیش از ۵۰٪ کاهش یافته است. این نتایج با توجه به کمینه‌یابی همزمان دو تابع هدف در روش پیشنهادی به دست می‌آید. به عبارتی در روش پیشنهادی هر تابع هدف تا جایی کمینه می‌گردد که اثر مخربی بر بهینه‌یابی تابع هدف دیگر نداشته باشد. بنابراین مقدار تابع هدف  $L^m$  در مسئله چندهدفه الزاماً کمتر از مقدار آن در روش کواترنیون نخواهد بود. لیکن بهینه‌یابی همزمان دو تابع هدف باعث می‌شود علاوه بر کاهش میانگین خطای تعیین وضعیت، تغییرات آن نیز کاهش یابد.

در روش‌های پیشنهادی، پاسخ‌هایی قابل قبول هستند که علاوه بر تابع هدف، خطای آن را نیز در حضور داده‌های اغتشاشی کمینه کنند. در روش پیشنهادی، پاسخ‌هایی بهینه هستند که نتوان توسط آن‌ها یک تابع هدف را بهینه کرد بدون اینکه اثر مخربی بر کمینه‌یابی تابع هدف دیگر داشته باشد. به عبارتی، در مسئله مورد بررسی خطای تابع هدف تا جایی کمینه می‌گردد که اثر مخربی بر بهینه‌یابی تابع هدف دیگر نداشته باشد و بالعکس. این امر با کمینه‌یابی پارامترهای  $\alpha$  و  $\beta$  برای هر یک از ۱۰۰ داده ورودی حاصل شده است. از آنجا که خطای تابع هدف تابعی از خطای بردارهای ورودی است، بنابراین کمینه کردن خطای تابع هدف باعث کاهش اثر خطای بردارهای ورودی بر دقت تعیین وضعیت می‌شود. بنابراین میانگین خطای تعیین وضعیت و واریانس آن نیز کاهش می‌یابد.

جدول ۱. مقایسه عملکرد روش کواترنیون و روش پیشنهادی

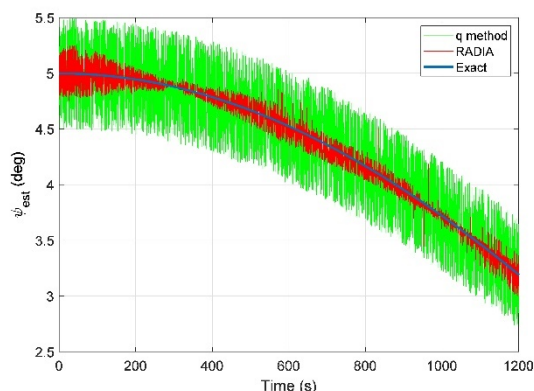
روش	میانگین خطای تعیین وضعیت	واریانس خطای تعیین وضعیت	زمان اجرا
روش کواترنیون	15.1352	95.1604	0.006
روش پیشنهادی با حلگر NSGA II	0.5699	0.1915	124.58
روش پیشنهادی با حلگر کمینه بیشینه	2.2025	0.4409	0.287

## ۱-۲- تحلیل عملکرد در حرکت مداری

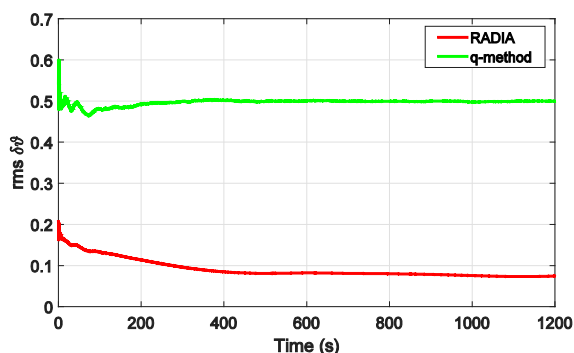
مسئله تعیین وضعیت را برای یک ماهواره در مداری دایروی با میانگین ارتفاع ۸۰۰ کیلومتر در نظر بگیرید. یک شبیه‌سازی غیرخطی از حرکت مداری ماهواره با شرایط نخست مندرج در جدول ۲ انجام شده است. مشخصات ماهواره و مشخصات مداری آن در جدول (۳) آورده شده است. به منظور تعیین وضعیت، از یک حسگر خورشید و یک حسگر سه محوره مغناطیس‌سنج استفاده شده است. به منظور مدل‌سازی میدان مغناطیسی زمین در دستگاه مرجع، از مدل مغناطیس دوقطبی استفاده شده است. همچنین، از مدل شرح داده شده در مرجع [۳۲] برای مدل‌سازی حرکت خورشید استفاده شده است. بردارهای اندازه‌گیری و مرجع به دلیل وجود عواملی نظیر نویز حسگرها،

جدول ۲. شرایط اولیه

پارامتر	مقدار	واحد
$\varphi_0$	0	deg
$\theta_0$	0	deg
$\psi_0$	5	deg
$\omega_{x0}$	0	rad/s
$\omega_{y0}$	0	rad/s
$\omega_{z0}$	0	rad/s



شکل ۳. مقایسه تخمین زاویه سمت



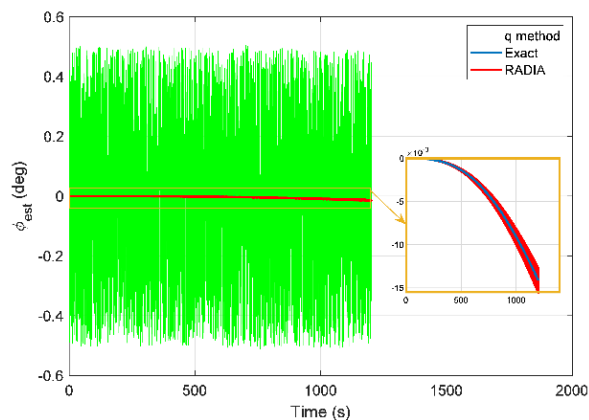
شکل ۴. مقایسه ریشه میانگین مجذور خطای تعیین وضعیت

## ۵- نتیجه‌گیری

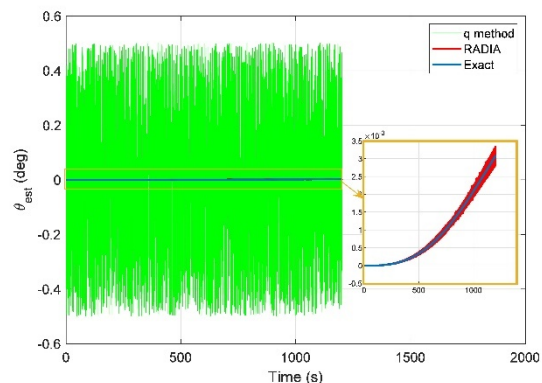
در این مقاله، عدم قطعیت بردارهای ورودی به صورت کراندار در نظر گرفته شدند و از حساب بازه‌ای به منظور مدل‌سازی آن‌ها استفاده شد. با مدل‌سازی عدم قطعیت‌ها به صورت عباراتی نامعین اما کراندار، و بازنویسی مسئله وهبا، یک مسئله بهینه‌یابی چندهدفه با قیود غیرخطی و با دو تابع هدف حاصل شد. با کمینه‌یابی مسئله چندهدفه غیرخطی بدست آمده به کمک یک حلگر چندهدفه، ضمن بهینه‌یابی تابع اصلی مسئله وهبا، تغییرات آن نیز کمینه‌یابی گردید. به منظور کاهش زمان اجرای ناشی از بکارگیری حلگرهای اکتشافی در حل مسائل چندهدفه، از الگوریتم بهینه‌یابی کمینه-بیشینه به منظور حل مسئله چندهدفه استفاده شد. خروجی این فرآیند ضمن داشتن زمان اجرای کم، به دست آوردن پاسخ‌های بهینه‌ای است که کمترین اثرپذیری را از عدم قطعیت بردارهای ورودی دارند. به عبارتی دیگر، خطای تعیین وضعیت الگوریتم‌های مبتنی بر حل مسئله وهبا کمینه گردید. خصوصیتی که

جدول ۳. مشخصات فیزیکی ماهواره و مشخصات مداری آن

Moment of inertia	80	$Kg.m^2$
Moment of inertia	80	$Kg.m^2$
Moment of inertia	4	$Kg.m^2$
Apogee	800	$Km$
Perigee	800	$Km$
Inclination	75	$deg$
Right Ascension of Ascending Node	0	$deg$
Argument of Perigee	0	$deg$



شکل ۱. مقایسه تخمین زاویه رول



شکل ۲. مقایسه تخمین زاویه پیچ

- [15] Hajiyeve, C., Cilden-Guler, D. Satellite attitude estimation using svd-aided ekf with simultaneous process and measurement covariance adaptation. *Adv. Space Res.* Vol. 68, No. 9, pp. 3875–3890. 2021.
- [16] Hajiyeve, C., Cilden-Guler, D. Attitude filtering with uncertain process and measurement noise covariance using SVD-aided adaptive UKF. *Int J Robust Nonlinear Control.* Vol. 33, No. 17, pp. 10512–10531. 2023.
- [17] Chingiz Hajiyeve, Demet Cilden-Guler, Attitude and gyro bias estimation by SVD-aided EKF, *Measurement*, Vol. 205, 2022.
- [18] Ahmed, S. and E.C. Kerrigan, Robust Static Attitude Determination via Robust Optimization. *IFAC Proceedings Volumes*, Vol. 44, No. 1, pp. 5807-5812. 2011.
- [19] Ahmed, S., E.C. Kerrigan, and I.M. Jaimoukha, A semidefinite relaxation-based algorithm for robust attitude estimation. *IEEE transactions on signal processing*, Vol. 60, No. 8, pp. 3942-3952. 2012.
- [20] Yang, H. and L. Carlone, A quaternion-based certifiably optimal solution to the Wahba problem with outliers. in *Proceedings of the IEEE/CVF International Conference on Computer Vision*. 2019.
- [21] Bhatt, M., S. Sukumar, and A.K. Sanyal. Rigid body geometric attitude estimator using multi-rate sensors. in *2020 59th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*. 2020.
- [22] Wu, J., et al. Lasso Wahba's Problem and Its Analytical Solution for Spacecraft Attitude Determination. in *2021 IEEE 17th International Conference on Automation Science and Engineering (CASE)*. 2021. IEEE.
- [23] Wahba, G., A least squares estimate of satellite attitude. *SIAM review*, Vol.7, No. 3, pp. 409-409. 1965.
- [24] Lerner, G.M., Three-axis attitude determination, in *Spacecraft Attitude Determination and Control*, J.R. Wertz, Editor, Kluwer Academic: Dordrecht. 1978.
- [25] Chang, G., T. Xu, and Q. Wang, Error analysis of Davenport's method. *Automatica*, Vol. 75, pp. 217-220. 2017.
- [26] Shuster, M.D., The generalized Wahba problem. *The Journal of the Astronautical Sciences*, Vol. 54, No. 2, pp. 245-259. 2006.
- [27] Moore, R.E., R.B. Kearfott, and J.M. Cloud, Introduction to interval analysis, Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics. 2009.

[۲۸] ح. قدیری، «تعیین وضعیت ماهواره با استفاده از حساب بازه‌ای»، رساله دکتری، مجتمع دانشگاهی هوافضا، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ۱۴۰۱.

- [29] Ghadiri, H., Esmaelzadeh, R., and Zardashti, R. Robust optimal attitude determination using interval analysis. *Advances in Space Research*, Vol. 69, No. 6, 2611-2617. 2022.

[۳۰] ر. اسماعیل‌زاده، ح. قدیری و ر. زردشتی، «توسعه تعیین وضعیت استاتیکی ماهواره براساس یک الگوریتم چند هدفه مبتنی بر حساب بازه‌ای»، دانش و فناوری هوافضا، ۱۴۰۱.

دیگر روش‌های نقطه به نقطه از آن بهره‌مند نیستند. همچنین استفاده از حلگر نیل به آرمان در قالب یک مسئله بهینه‌یابی کمینه بیشینه امکان به کارگیری برخط روش پیشنهادی را فراهم می‌کند.

## تعارض منافع

هیچ‌گونه تعارض منافع توسط نویسندگان بیان نشده است.

## مراجع

- [1] Markley, F.L. and J.L. Crassidis, Fundamentals of spacecraft attitude determination and control, Springer. 2014.
- [2] Shuster, M. Approximate algorithms for fast optimal attitude computation. in *Guidance and Control Conference*. 1978.
- [3] Shuster, M.D. and S.D. Oh, Three-axis attitude determination from vector observations. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 4, No. 1, pp. 70-77. 1981.
- [4] Markley, F.L. and D. Mortari, Quaternion attitude estimation using vector observations. *Journal of the Astronautical Sciences*, Vol. 48, No. 2, pp. 359-380. 2000.
- [5] Mortari, D., ESOQ-2 single-point algorithm for fast optimal spacecraft attitude determination. *Advances in the Astronautical Sciences*, Vol. 95, pp. 817-826. 1997.
- [6] Mortari, D., ESOQ: A closed-form solution to the Wahba problem. *Journal of the Astronautical Sciences*, Vol. 45, No. 2, pp. 195-204. 1997.
- [7] Markley, F.L., Attitude determination using vector observations and the singular value decomposition. *Journal of the Astronautical Sciences*, Vol. 36, No. 3, pp. 245-258. 1988.
- [8] Markley, F.L., Attitude determination using vector observations: A fast optimal matrix algorithm. 1993.
- [9] Wu, J., et al., Fast linear quaternion attitude estimator using vector observations. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, Vol. 15, No. 1, pp. 307-319. 2018.
- [10] Bar-Itzhack, I.Y., REQUEST-A recursive QUEST algorithm for sequential attitude determination. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 19, No. 5, pp. 1034-1038. 1996.
- [11] Choukroun, D., I.Y. Bar-Itzhack, and Y. Oshman, Optimal-REQUEST algorithm for attitude determination. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 27, No. 3, pp. 418-425. 2004.
- [12] Psiaki, M.L., Attitude-determination filtering via extended quaternion estimation. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 23, No. 2, pp. 206-214. 2000.
- [13] Christian, J.A. and E.G. Lightsey, Sequential optimal attitude recursion filter. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 33, No. 6, pp. 1787-1800. 2010.
- [14] Yun, X., Bachmann, E.R. Design, implementation, and experimental results of a quaternion-based Kalman filter for human body motion tracking. *IEEE Trans. Robot.* Vol. 22, No. 6, pp. 1216–1227. 2006.

- [31] Branke, J., Branke, J., Deb, K., Miettinen, K., and Slowiński, R. (Eds.). Multiobjective optimization: Interactive and evolutionary approaches. Vol. 5252. Springer Science & Business Media. 2008.
- [32] Vallado, D. A. Fundamentals of astrodynamics and applications. Vol. 12. Springer Science & Business Media, 2001.



## COPYRIGHTS

© 2024 by the authors. Licensee Iranian Space Research Center of Iran. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)