



Available in:  
Journal.isrc.ac.ir

Journal of  
Space Science, Technology  
& Applications (Persian)

Vol. 2, No. 1, pp.: 84-95  
2022

DOI:

10.22034/JSSTA.2022.327381.1057

### Article Info

Received: 2022-3-29  
Accepted: 2022-1-11

### Keywords

Model predictive control,  
Robust control, Tube-based  
MPC, Satellite attitude  
control system, Minimal  
robust positive invariant  
(mRPI) set, Reduced  
calculation of approximate  
mRPI

### How to Cite this article

Mahyar Madani Esfahani,  
Aref Aghamolaie, Taleb  
Abdollahi, Saeed  
Shamaghdari, "Satellite  
Attitude Control Design via  
Tube-based Robust Model  
Predictive Control based on  
Reduced Calculations",  
*Journal of Space Science,  
Technology and  
Applications*, vol 2 (1), p.:  
84-95, 2022.

Original Article

## Satellite Attitude Control Design via Tube-based Robust Model Predictive Control based on Reduced Calculations

Mahyar Madani Esfahani<sup>\*,1</sup>, Aref Aghamolaie<sup>2</sup>  
Taleb Abdollahi<sup>3</sup>, Saeed Shamaghdari<sup>\*,4</sup>

1. School of Electrical Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran; mahyar\_madani@cmps2.iust.ac.ir
2. School of Electrical Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran; a\_ghamolaie@elec.iust.ac.ir
3. Iran Space Institute, Tehran, Iran; t.abdollahi@isrc.ac.ir
4. \*, School of Electrical Engineering, Iran University of Science & Technology, Tehran, Iran; shamaghdari@iust.ac.ir, Corresponding author

### Abstract

In this paper, a satellite attitude control system (SACS) based on tube-based robust model predictive control (TMPC) methodology is designed which is robust to bounded disturbances. All Euler angles and their derivatives are ensured not to deviate more than a determined limit under those disturbances with known bounds. It is conducted based on the concept of the minimal robust positive invariant (mRPI) set. Actuators and Euler variables constraints could be considered in the SACS. The dynamics are guaranteed to be robustly stable. Given that the satellite dynamics consists of a great number of states, it is not possible to implement a TMPC scheme on the SACS in real-time. The number of satellite system states in this article is 6. Which has practically increased the volume of calculations. In order to solve this challenge, the proposed solution of tube estimation is presented to reduce the volume of satellite calculations. With this estimation, the process of increasing the volume of computations for tube-based robust predictive control design for satellite is stopped. For the desired system, simulation has been done in the presence of uncertain and limited disturbance. The results show satellite attitude control by reducing the amount of computation when designing a tube-based robust Model predictive control.



دسترس پذیر در نشانی:  
Journal.isrc.ac.ir

دو فصلنامه  
علوم، فناوری و  
کاربردهای فضای

سال دوم، شماره ۱، صفحه ۸۴-۹۵  
بهار و تابستان ۱۴۰۱

DOI:  
10.22034/JSSTA.2022.327381.1057

تاریخچه داوری

دریافت: ۱۴۰۰/۱۱/۱۱

پذیرش: ۱۴۰۱/۰۱/۰۹

واژه‌های کلیدی

کنترل مدل پیش‌بین مبتنی بر تیوب،  
کنترل وضعیت ماهواره، کاهش  
محاسبات تخمین کوچکترین  
مجموعه‌ی نامتغیر مثبت مقاوم

نحوه استناد به این مقاله

مهیار مدنی اصفهانی، عارف آقاملائی،  
طالب عبدالهی، سعید شمعقدری،  
"کنترل وضعیت ماهواره با کنترل  
پیش‌بین مقاوم مبتنی بر تیوب با  
محاسبات کاهش یافته"، دو فصلنامه  
علوم، فناوری و کاربردهای فضای، جلد  
دوم، شماره اول، صفحات ۸۴-۹۵،  
۱۴۰۱.

مقاله پژوهشی

## کنترل وضعیت ماهواره با کنترل پیش‌بین مقاوم مبتنی بر تیوب با محاسبات کاهش یافته

مهیار مدنی اصفهانی<sup>۱</sup>، عارف آقاملائی<sup>۲</sup>، طالب عبدالهی<sup>۳</sup>، سعید شمعقدری<sup>۴\*</sup>

۱. دانشکده برق دانشگاه علم و صنعت ایران - mahyar\_madani@cmps2.iust.ac.ir

۲. دانشکده برق دانشگاه علم و صنعت ایران - a\_ghamolaie@elec.iust.ac.ir

۳. پژوهشگاه فضایی ایران - t.abdollahi@isrc.ac.ir

۴. دانشکده برق دانشگاه علم و صنعت ایران - shamghdari@iust.ac.ir (نویسنده مسئول)

### چکیده

در این مقاله، یک کنترل‌کننده پیش‌بین مقاوم مبتنی بر تیوب برای سیستم کنترل وضعیت ماهواره (SACS)، در حضور اغتشاش خارجی نامعین و محدود طراحی شده است. بر اساس این طراحی، تضمین می‌شود که انحراف ناشی از اغتشاش محدود، بر روی تمامی زوایای اوپلر و مشتقات آنها به اندازه حد تعیین شده‌ای است. این حد تعیین شده بر اساس مفهوم کوچکترین مجموعه تغییرناپذیر مثبت مقاوم (mRPI) است. عملگرها و متغیرهای ثابت اوپلر بر اساس سیستم کنترل وضعیت ماهواره (SACS) در نظر گرفته می‌شود. از طرفی تضمین پایداری دینامیک سیستم به صورت مقاوم قابل بیان است. ماهواره سیستمی با پیچیدگی بالاست. با توجه به اینکه دینامیک ماهواره دارای تعداد زیادی حالت سیستم است، امکان اعمال کنترل وضعیت ماهواره توسط کنترل‌کننده پیش‌بین مقاوم مبتنی بر تیوب به صورت آنلاین میسر نیست. تعداد حالت‌های سیستم کنترل وضعیت ماهواره در این مقاله ۶ عدد است. به دلیل این تعداد حالت‌های زیاد، سیستم ماهواره هنگام محاسبه کوچک‌ترین مجموعه نامتغیر مثبت مقاوم، با چالش افزایش حجم محاسبات در هنگام محاسبه این مجموعه یا همان تیوب مواجه است. حجم محاسبات به دلیل جمع‌های متعدد مینکوفسکی در محاسبه تیوب، به صورت نمایی افزایش می‌یابد. در راستای برطرف شدن این چالش، راهکار پیشنهادی تخمین تیوب برای کاهش حجم محاسبات ماهواره ارائه می‌شود. با این تخمین، روند افزایش حجم محاسبات طراحی کنترل پیش‌بین مقاوم مبتنی بر تیوب برای ماهواره متوقف می‌شود. برای سیستم مورد نظر، در حضور اغتشاش نامعین و محدود شبیه‌سازی انجام شده است. نتایج نشان‌دهنده کنترل وضعیت ماهواره با کاهش حجم محاسبات در هنگام طراحی کنترل‌کننده پیش‌بین مقاوم مبتنی بر تیوب است.

یکی از چالش‌های به‌روز حوزه ماهواره‌ها، کنترل وضعیت ماهواره‌ها است. از آنجایی که ماهواره، سیستمی غیرخطی به همراه عدم قطعیت‌های ناشی از پارامترهای مدل و اغتشاشات است، کنترل وضعیت ماهواره امری چالش برانگیز شده است. یکی از کنترل‌کننده‌های کارآمد که می‌تواند برای کنترل وضعیت ماهواره مفید باشد، کنترل‌کننده مدل پیش‌بین است. کنترل‌کننده مدل پیش‌بین که امکان طراحی برای سیستم‌های چند ورودی و چند خروجی با در نظر گرفتن اغتشاش هنگام طراحی سینگال کنترلی را فراهم می‌کند، انتخاب مناسبی برای کنترل وضعیت ماهواره‌ها است. یکی از انواع این کنترل‌کننده، کنترل‌کننده مدل پیش‌بین مقاوم بوده که یکی از مشخصه‌های آن، تضمین عملکرد و پایداری و مقاوم بودن در مقابل اغتشاشات نامعین و محدود، است. در کارهای انجام شده، راهکارهای مختلفی در راستای مقاوم بودن در برابر اغتشاشات استفاده شده است، به عنوان مثال در مقالات [۱-۲]، راهبرد کنترل سوچینگ و کنترل تطبیقی در راستای دفع اثر اغتشاشات یا نامعینی استفاده شده است. از جمله راهکارهای دیگر استفاده از کنترل‌کننده پیش‌بین مبتنی بر تیوب<sup>۱</sup> (TMPC) بوده که با توجه به ویژگی‌هایی که دارد، به نوعی از زیر شاخه‌های کنترل‌کننده‌های پیش‌بین مقاوم است. کنترل‌کننده پیش‌بین مقاوم مبتنی بر تیوب در سال ۲۰۰۴ توسط لانگسون<sup>۲</sup> و همکاران [۳] معرفی شد. کنترل‌کننده پیش‌بین مبتنی بر تیوب معرفی شده، علاوه بر توانایی پاسخگویی در حضور اغتشاش محدود، پایداری مجانبی را تضمین می‌کند. با توجه به مشخص بودن میزان محدودیت اغتشاش، با طراحی کنترل‌کننده پیش‌بین کلاسیک برای سیستم نامی و همچنین به‌دست آوردن مجموعه نامتغیر مثبت مقاوم اغتشاش‌ها، یک تیوب حول حالت مجموعه نامی تشکیل داده و تضمین می‌شود که حالت سیستم واقعی با حضور این اغتشاش محدود از این مجموعه نامتغیر مثبت مقاوم بیرون نمی‌رود. پس از این مقاله، پژوهش‌های گوناگونی برای توسعه TMPC صورت گرفت. به عنوان مثال در پژوهش انجام

شده توسط مین<sup>۳</sup> و همکاران [۴]، برای سیستم خطی گسسته با وجود قید ورودی و اغتشاش محدود طراحی صورت گرفت. در پژوهش انجام شده توسط راکوویچ<sup>۴</sup> و همکاران [۵] نیز علاوه بر طراحی TMPC، راهکاری برای کم کردن مقدار محافظه کاری ارائه شده است. همچنین با اضافه شدن اهداف اقتصادی نیز زیرشاخه‌های جدیدی برای کنترل‌کننده‌های پیش‌بین مقاوم مبتنی بر تیوب به وجود آمده است. همانند کنترل‌کننده پیش‌بین اقتصادی مبتنی بر تیوب که در [۶-۷] ارائه شده است.

در پژوهش دیگری که توسط مامارلا<sup>۵</sup> و همکاران انجام شده [۸]، طراحی یک کنترل‌کننده پیش‌بین مقاوم مبتنی بر تیوب برای کنترل وضعیت یک ماهواره مکعبی مطالعاتی صورت گرفته است. این طراحی برای حالتی که اغتشاش خارجی محدود و عدم قطعیت پارامترهای دینامیک ماهواره وجود دارد، صورت گرفته است. در پژوهش انجام شده توسط کیم<sup>۶</sup> و همکاران [۹] با توجه به دشواری کنترل وضعیت سه محوره ماهواره با استفاده از نیروی محرکه مغناطیسی به دلیل وجود میدان مغناطیسی متغیر با زمان زمین، با استفاده از کنترل‌کننده مدل پیش‌بین تغییرپذیر با زمان به حل این مشکل پرداخته شده است. در پژوهش انجام شده توسط پیروزمند<sup>۷</sup> و همکاران [۱۰] کنترل‌کننده پیش‌بین مقاوم بر اساس مدل مرجع تطبیقی سیستم در نظر گرفته شده است که برای ماهواره‌های با ۳ درجه آزادی با ممان اینرسی نامعین و اغتشاش خارجی برای ایجاد پایداری و بهبود عملکرد سیستم حلقه بسته و کنترل وضعیت مورد استفاده قرار می‌گیرد. در پژوهش دیگری که توسط ویلانویوا<sup>۸</sup> و همکاران انجام شده [۱۱] قاعده‌ای کلی برای تجزیه و تحلیل یک کلاس کلی از سیستم‌های گسسته غیرخطی نامشخص با محدودیت‌های حالت، کنترل و اغتشاش ارائه شده است که براساس آن چارچوب تجزیه و تحلیل پایداری دقیق کنترل‌کننده‌های پیش‌بین اقتصادی مقاوم مبتنی بر تیوب ارائه شده است. در پژوهش انجام شده توسط سبقتی<sup>۹</sup> و همکاران [۱۲] طراحی کنترل‌کننده پیش‌بین اقتصادی مبتنی بر تیوب در حضور اغتشاش محدود صورت

6 Kim  
7 Pirouzmand  
8 Villanueva  
9 Sebhathi

1 Tube Model Predictive Control (TMPC)  
2 Langson  
3 Mayne  
4 Raković  
5 Mammarella

چالش حجم بالای محاسبات در محاسبه مجموعه mRPI از یک تخمین برای کاهش بار محاسبات استفاده می‌شود.

در این مقاله، در قسمت ۲ به بررسی مدل ماهواره پرداخته شده است. در این بخش، سینماتیک و دینامیک ماهواره بررسی می‌شود. در بخش ۳ به نحوه طراحی کنترل‌کننده پیش‌بین مقاوم مبتنی بر تیوب اشاره شده است. در بخش ۴، در ابتدا نحوه تخمین مجموعه mRPI در سیستم‌هایی با حضور اغتشاش پرداخته، سپس نحوه کاهش حجم محاسبات در تخمین مجموعه mRPI بیان می‌شود. در نهایت در بخش ۵، نتایج شبیه‌سازی تخمین mRPI با محاسبات کاهش یافته و طراحی TMPC برای سیستم ماهواره مذکور ارائه شده است.

## ۲- سیستم ماهواره

در این بخش در ابتدا دستگاه مختصات ماهواره بیان شده است. و سپس بر اساس مرجع [۱۴] به سینماتیک و دینامیک ماهواره اشاره شده است.

### ۲-۱- دستگاه مختصات ماهواره

برای توصیف دینامیک وضعیت، سینماتیک و میدان ژئومغناطیسی یک ماهواره صلب فریم‌های مختصات مرجع به سه صورت تعریف می‌شوند. دستگاه مختصات اینرسی مرکز زمین  $F_I$ ، دستگاه مختصات که آن را با  $F_O$  نشان می‌دهند و این دستگاه مختصات وابسته به ماهواره است. دستگاه مختصات بدنه  $F_B$  وابسته به مرکز جرم ماهواره است. شکل ۱، سه دستگاه مختصات مختلف برای ماهواره را نشان داده است [۱۴].

گرفته است. در این مقاله، معیارهای اقتصادی متغیر با زمان در تابع هزینه مرحله‌ای طراحی کنترل و حالات اولیه سیستم نامی به عنوان متغیرهای تصمیم در نظر گرفته شده است. این راهکار موجب شده تا کنترل‌کننده اطلاعات بیشتری در مورد سیستم واقعی بداند تا از رویکرد افق بازگشتی استفاده کند. از دیگر دستاوردهای این مقاله، افزایش درجه آزادی کنترل و ناحیه جذب بزرگتر است.

این نکته شایان ذکر بوده که در راستای طراحی کنترل‌کننده پیش‌بین مقاوم مبتنی بر تیوب (TMPC)، لازم بوده که کوچکترین مجموعه تغییرناپذیر مثبت مقاوم<sup>۱</sup> برای سیستم با حضور اغتشاش محاسبه شود. با توجه به اینکه این موضوع امری غیرممکن است، از تخمین این مجموعه mRPI استفاده می‌شود. در پژوهش انجام شده توسط راکوویچ<sup>۲</sup> و همکاران [۱۳] به نحوه تخمین کوچکترین مجموعه تغییرناپذیر مثبت مقاوم برای سیستم‌های در حضور اغتشاش پرداخته است. یکی از ایرادات این روش تخمین، حجم بالای محاسبات است. با توجه به اینکه هنگام تخمین این مجموعه، جمع‌های متعدد مینکوفسکی استفاده می‌شود، حجم محاسبات به صورت نمایی افزایش می‌یابد. این مشکل هنگامی که تعداد حالت‌های سیستم افزایش می‌یابد، بیشتر نمایان می‌شود. به عنوان مثال، برای سیستم ماهواره که دارای ۶ حالت است، به دلیل افزایش شدید حجم محاسبات، امکان محاسبه mRPI غیرممکن می‌شود. در راستای برطرف شدن این چالش، در این مقاله راهکاری نوین برای کاهش حجم محاسبات آورده شده است.

سینماتیک و دینامیک سیستم ماهواره مورد استفاده در این مقاله، بر اساس کتاب سیدی<sup>۳</sup> [۱۴] بیان شده است. طراحی کنترل‌کننده پیش‌بین برای کنترل وضعیت ماهواره‌های مختلف همواره مورد توجه بوده است. به عنوان مثال، در مرجع [۱۶-۱۵] برای کنترل وضعیت دو ماهواره مختلف، از کنترل‌کننده پیش‌بین مقاوم استفاده شده است.

در این مقاله، طراحی کنترل‌کننده پیش‌بین مقاوم مبتنی بر تیوب برای کنترل وضعیت ماهواره‌ای در حضور اغتشاش خارجی نامعین و محدود انجام شده است. در راستای برطرف نمودن

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p + (q \sin \phi + r \cos \phi) \tan \theta \\ q \cos \phi - r \sin \phi \\ (q \sin \phi + r \cos \phi) \sec \theta \end{bmatrix} \quad (3)$$

### ۳-۲- دینامیک ماهواره

معادلات اوپلر برای ماهواره با دستگاه مختصات بدنه‌ای، از قانون نیوتن برای حرکت چرخشی به دست می‌آید.

$$T_c + T_d = \dot{h} + \omega \times (h + h_w) \quad (4)$$

در این معادله  $\sum T$  مجموع گشتاورها شامل  $T_c$  (گشتاور کنترلی)،  $T_d$  (گشتاور اختلال) و  $\dot{h}$  مشتق نسبت به زمان مجموع تکانه زاویه‌ای در مختصات اینرسی است با خطی‌سازی دینامیک ماهواره، معادلات به فرم زیر در می‌آیند:

$$T_{cx} + T_{dx} = I_x \ddot{\phi} + 4\omega_0^2 (I_y - I_z) \phi + \omega_0 (I_y - I_z - I_x) \dot{\psi} \quad (5)$$

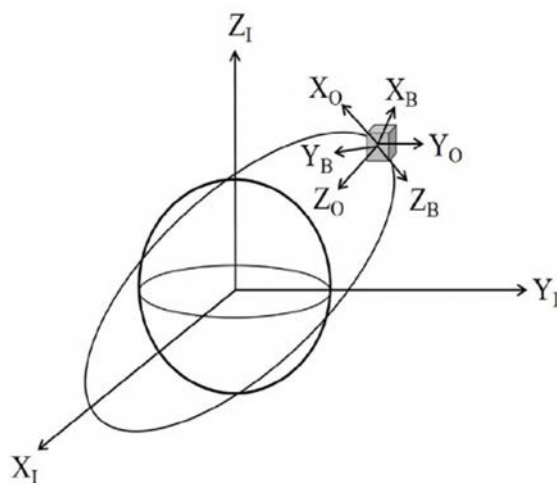
$$T_{cy} + T_{dy} = I_y \ddot{\theta} + 3\omega_0^2 (I_x - I_z) \theta \quad (6)$$

$$T_{cz} + T_{dz} = I_z \ddot{\psi} + \omega_0^2 (I_y - I_x) \psi + \omega_0 (-I_y + I_z + I_x) \dot{\phi} \quad (7)$$

معادله فضای حالت ماهواره به صورت زیر است:

$$\dot{x}(t) = A_c x(t) + B_c (u_c(t) + u_d(t)) \quad (8)$$

$$x = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad u_c = \begin{bmatrix} T_{cx} \\ T_{cy} \\ T_{cz} \end{bmatrix} \quad u_d = \begin{bmatrix} T_{dx} \\ T_{dy} \\ T_{dz} \end{bmatrix} \quad (9)$$



شکل ۱. رابطه بین سه دستگاه مختصات برای ماهواره [۱۴]

### ۲-۲- سینماتیک ماهواره

معادلات سینماتیک در دستگاه مختصات بدنه‌ای توسط معادلات اوپلر به دست می‌آیند. در معادله حرکت ماهواره، نیاز به تبدیل دستگاه‌های مختصات با توجه به نوع مأموریت داریم. در دینامیک نشانه‌روی، نیاز به تبدیل دستگاه مختصات بدنه  $F_B$  به دستگاه مختصات اوریبتالی  $F_O$  داریم که با ماتریس تبدیل زیر نشان داده می‌شود. این ماتریس تبدیل با فرض در نظر گرفتن  $\phi, \theta, \psi$  به عنوان زوایای اوپلر، که به ترتیب  $\phi$  نمایانگر *roll*،  $\theta$  نمایانگر *pitch* و  $\psi$  نمایانگر *yaw* است، تشکیل می‌شود.

(۱)

$$R = \begin{bmatrix} C_\theta C_\psi & S_\phi S_\theta C_\psi - C_\phi S_\psi & C_\phi S_\theta C_\psi + S_\phi S_\psi \\ C_\theta S_\psi & S_\phi S_\theta S_\psi + C_\phi C_\psi & C_\phi S_\theta S_\psi - S_\phi C_\psi \\ -S_\theta & S_\phi C_\theta & C_\phi C_\theta \end{bmatrix}$$

در این معادله  $S_x$  و  $C_x$  نشان دهنده  $\sin x$  و  $\cos x$  هستند. زوایای اوپلر در معادله بالا زوایای بین  $F_O$  و  $F_B$  هستند.  $\omega_{B/O}^B$  بردار سرعت زاویه‌ای بدنه است که بیانگر سرعت زاویه‌ای بدنه مربوط به  $F_O$  بیان شده در  $F_B$  است که نشان دهنده روابط بین زوایای اوپلر و مشتقاتش است [۱۴].

$$\omega = \omega_{B/O}^B = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\theta} \cos \phi - \dot{\psi} \cos \theta \sin \phi \\ \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi - \dot{\theta} \sin \phi \end{bmatrix} \quad (2)$$

## ۳- کنترل پیش‌بین مقاوم مبتنی بر تیوب

کنترل پیش‌بین مقاوم مبتنی بر تیوب بر اساس تئوری بیان شده در مقاله [۵] آورده شده است. سیستم گسسته زمان خطی نامتغیر با زمان، به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$x^+ = Ax + Bu + w \quad (10)$$

که در اینجا،  $x$  حالت فعلی سیستم  $x \in R^n$  و  $u$  سیگنال کنترلی  $u \in R^m$  است. همچنین  $w$  اغتشاش محدود  $w \in R^n$  در نظر گرفته می‌شود. با توجه به محدودیت‌های حالت سیستم و سیگنال کنترلی، شرایط زیر نیز برقرار است:

$$u \in \mathbb{U}, \quad x \in \mathbb{X}, w \in W \quad (11)$$

که  $\mathbb{U}$  فشرده و  $\mathbb{X}$  بسته و  $W$  فشرده است و مبدأ را شامل می‌شود. با در نظر گرفتن  $u$  به صورت مجموعه‌ای از سیگنال‌های کنترلی و همچنین  $w$  به صورت مجموعه‌ای از اغتشاش‌ها خواهیم داشت:

$$\{u(0), u(1), u(2), \dots, u(N-1)\} \\ \{w(0), w(1), w(2), \dots, w(N-1)\} \quad (12)$$

که در آن  $N = \{0, 1, 2, \dots\}$  است. پاسخ حل معادله (۱۰) در زمان  $i$  به صورت  $\phi(i; x, u, w)$  و سیستم نامی متناظر به صورت زیر است:

$$\tilde{x}^+ = A\tilde{x} + B\tilde{u} \quad (13)$$

که پاسخ آن با  $\bar{\phi}(i; \tilde{x}, \tilde{u})$  نشان داده می‌شود. در ابتدا باید مقدار  $K$  به نحوی در نظر گرفته شود، که علاوه بر  $K \in R^{m \times n}$  میزان  $A_K \triangleq A + BK$  نیز پایدار باشد. حال که امکان پایدار شدن سیستم نامی با تعیین  $K$  مناسب و پایدار ساز میسر شد، باید به نحوی کنترل کننده نسبت به تاثیر تمامی اغتشاش‌های احتمالی

وارد به سیستم مقاوم شود. از این رو، برای سیستم نامعین کنترل-شده  $x^+ = Ax + w$  مجموعه نامتغیر اغتشاش‌ها با  $\Omega$  نمایش داده شده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A_K \Omega \oplus W \subseteq \Omega \quad (14)$$

که در این معادله، برای جمع دو مجموعه از جمع مینکوفسکی  $\oplus$  استفاده شده است. جمع مینکوفسکی برای دو مجموعه  $A, B$ ، با افزودن هر بردار در  $A$  به هر بردار در  $B$  تعریف شده که به صورت  $A \oplus B = \{a + b | a \in A, b \in B\}$  نمایش داده می‌شود. ساختار اصلی تیوب بر اساس قضیه زیر قابل بیان است.

**قضیه ۱:** فرض شود که مجموعه  $\Omega$  برای  $x^+ = Ax + w$  مجموعه نامتغیر اغتشاشات باشد. اگر  $x \in \tilde{x} \oplus \Omega$  و  $u = \tilde{u} + K(x - \tilde{x})$  باشد، آن گاه برای تمام  $w \in W$  داریم  $x^+ \in \tilde{x}^+ \oplus \Omega$  که در آن  $x^+ = Ax + Bu + w$  و همچنین  $\tilde{x}^+ = A\tilde{x} + B\tilde{u}$

از طرفی برای کاهش محافظه‌کاری، به دنبال کوچکترین مجموعه  $\Omega$  ممکن خواهیم بود. کوچکترین مجموعه ثابت اغتشاش‌ها<sup>۱</sup> یا کوچکترین مجموعه ثابت مثبت مقاوم<sup>۲</sup> به صورت  $\sum_{i=0}^{\infty} A_K^i W$  قابل تعریف است. این مجموعه در حقیقت همان تیوب است. پیدا کردن این مجموعه غیرممکن است. از این رو، تقریبی از مجموعه mRPI نیز قابل قبول است. این تقریب به صورت یک مجموعه چندوجهی<sup>۳</sup> قابل محاسبه است. در راستای طراحی کنترل کننده پیش‌بین مبتنی بر تیوب، باید مجموعه mRPI تخمین زده شود. محاسبه مجموعه mRPI قسمت چهارم مقاله آورده شده است. با توجه به اینکه تمام تاثیرات احتمالی ممکن از اغتشاشات را به صورت یک تیوب در نظر گرفته شده است، اکنون مسئله کنترل پیش‌بین برای سیستم نامی تعریف و حل شده و سپس تاثیرات تیوب به مسئله

3 Polytopic

1 Minimal disturbance invariant set

2 Minimal Robustly Positive Invariant Set (mRPI)

در واقع  $\mathcal{U}_N(\tilde{x})$  توالی سیگنال کنترلی به دست آمده مربوط به پاسخ حلقه باز کنترل پیش بین مدل برای سیستم نامی است. مجموعه  $\bar{X}_N \triangleq \{\tilde{x} \mid \mathcal{U}_N(\tilde{x}) \neq \emptyset\}$  شامل شرایط اولیه ای است که به ازای آن، مسئله کنترل پیش بین برای سیستم نامی، شدنی باشد. در مورد تابع هدف داریم:

$$\ell(\tilde{x}, \tilde{u}) \triangleq \left(\frac{1}{2}\right) [\tilde{x}^T Q \tilde{x} + \tilde{u}^T R \tilde{u}], \quad (22)$$

$$V_f(\tilde{x}) \triangleq \left(\frac{1}{2}\right) \tilde{x}^T P \tilde{x} \quad (23)$$

که در آن ماتریس های  $Q$ ،  $R$  و  $P$  مثبت معین باشد. در نهایت با در نظر گرفتن،  $\bar{u}^o(x) \triangleq \{\tilde{u}_0^o(\tilde{x}), \tilde{u}_1^o(\tilde{x}), \dots, \tilde{u}_{N-1}^o(\tilde{x})\}$  قانون کنترل پیش بین به صورت  $\kappa_N^o(\tilde{x}) \triangleq \tilde{u}_0^o(\tilde{x})$  است. بنابراین در مورد سیستم نامی داریم:

$$\tilde{x}^+ = A\tilde{x} + B\kappa_N^o(\tilde{x}) \quad (24)$$

در نتیجه مسئله کنترل پیش بین به صورت زیر اصلاح می شود و  $\mathbb{P}_N^*(\tilde{x})$  نامیده می شود:

$$V_N^*(\tilde{x}) = \min_{\tilde{x}_0, \tilde{u}} \{V_N(\tilde{x}_0, \tilde{u}) \mid \tilde{u} \in \mathcal{U}_N(\tilde{x}_0), x \in \tilde{x}_0 \oplus \Omega\} \quad (25)$$

$$(\tilde{x}_0^*(\tilde{x}), \tilde{u}^*(\tilde{x})) = \arg \min_{\tilde{x}_0, \tilde{u}} \{V_N(\tilde{x}_0, \tilde{u}) \mid \tilde{u} \in \mathcal{U}_N(\tilde{x}_0), x \in \tilde{x}_0 \oplus \Omega\} \quad (26)$$

چنانچه  $u^*(x) \triangleq \{u_0^*(x), u_1^*(x), \dots, u_{N-1}^*(x)\}$  باشد، آنگاه قانون کنترل کننده اعمالی به سیستم واقعی به صورت رابطه  $\kappa_N^*(x) \triangleq \tilde{u}_0^*(\tilde{x}) + K(x - \tilde{x}_0^*(\tilde{x}))$  است.

اضافه می گردد. این تئوری به صورت کامل در مقاله [5] موجود است.

مسئله  $\mathbb{P}_N(x)$  به صورت زیر تعریف می شود:

$$V_N^o(\tilde{x}) = \min_{\tilde{u}} \{V_N(\tilde{x}, \tilde{u}) \mid \tilde{u} \in \mathcal{U}_N(\tilde{x})\} \quad (15)$$

$$u^o(\tilde{x}) = \arg \min_{\tilde{u}} \{V_N(\tilde{x}, \tilde{u}) \mid \tilde{u} \in \mathcal{U}_N(\tilde{x})\} \quad (16)$$

که در آن، تابع هزینه مطابق

$$V_N(\tilde{x}, \tilde{u}) \triangleq \sum_{i=0}^{N-1} \ell(\tilde{x}(i), \tilde{u}(i)) + V_f(\tilde{x}(N)) \quad (17)$$

تعریف می شود. در واقع،  $V_N^o(\tilde{x})$  و  $\bar{u}^o(\tilde{x})$  به ترتیب مقدار بهینه تابع هدف و توالی سیگنال کنترلی بهینه ناشی از حل حلقه باز کنترل پیش بین مدل برای سیستم نامی است. از طرفی  $V_N(\tilde{x}, \tilde{u})$  تابع هدف کنترل پیش بین برای سیستم نامی است. برای معرفی  $\mathcal{U}_N(\tilde{x})$ ، قیود محافظه کاری شده به صورت زیر تعریف می شود:

$$\tilde{u}(i) \in \bar{U} \triangleq U \ominus K\Omega, \quad i \in \mathcal{J}_{N-1} \quad (18)$$

$$\tilde{x}(i) \in \bar{X} \triangleq X \ominus \Omega, \quad i \in \mathcal{J}_{N-1} \quad (19)$$

$$\tilde{x}(N) \in X_f \subset X \ominus \Omega \quad (20)$$

که در آن  $\mathcal{J}_{N-1} \triangleq \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$  و  $X_f$  قید ناحیه نهایی کنترل پیش بین برای سیستم نامی است. پس در نتیجه داریم:

$$\mathcal{U}_N(x) = \{\tilde{u} \mid \tilde{u}(i) \in \bar{U}, \bar{\phi}(i; \tilde{x}, \tilde{u}) \in \bar{X}, \forall i \in \mathcal{J}_{N-1}, \bar{\phi}(N; \tilde{x}, \tilde{u}) \in X_f\} \quad (21)$$

[۱۳]، برای سیستم با تعداد ورودی‌ها و خروجی‌ها مختلف، زمان محاسبه mRPI مطابق جدول ۱ است:

جدول ۱. مدت زمان محاسبه تخمین mRPI بدون کاهش محاسبات بر حسب ثانیه برای معادله حالت‌های با تعداد ورودی و خروجی‌های مختلف

خروجی ورودی	۲	۳	۴
۱	۲۵.۵۳ ثانیه	۸۲۴.۱۶ ثانیه	غیر ممکن بدلیل زمان طولانی
۲	۲۵.۴۹ ثانیه	۴۳۹.۸۰ ثانیه	غیر ممکن بدلیل زمان طولانی
۳		۲۷۶.۰۱ ثانیه	غیر ممکن بدلیل زمان طولانی

همان‌طور که در جدول ۱ مشاهده می‌شود، استفاده از روش مقاله [۱۳] برای سیستم‌هایی با دینامیک پیچیده ناکارآمد است و عملاً محاسبه تیوب به دلیل حجم بالای محاسبات امکان‌پذیر نیست. در این سیستم‌ها، به دلیل بعد بالای سیستم در هر بار استفاده از جمع مینکوفسکی، تعداد رئوس مجموعه تخمین زده شده چند برابر می‌شود.

ایده اصلی برای رفع این مشکل، استفاده از تقریب محیطی است. هر بار که الگوریتم تقریب mRPI را محاسبه کرد و شرط برقراری تخمین  $\varepsilon$  چک شد، چنانچه شرط برقرار نبود قبل از افزایش  $s$ ، مقدار  $RPI$  فعلی را با استفاده از یک شکل محیطی تقریب زده تا اجازه ندهیم تعداد رئوس از مقدار مشخص  $2^n$  عبور نماید.  $n$  تعداد حالت‌های سیستم است. سپس با افزایش یک گام دیگر  $s$ ، از شکل تقریب زده شده به جای  $RPI$  استفاده می‌شود و این عمل را تا اکتان شرط ادامه می‌دهیم. این کار اگرچه در کل منجر به بزرگتر شدن mRPI و در نتیجه آن افزایش بسیار محافظه کاری می‌شود، اما باعث شده تا محاسبات ناممکن تقریب mRPI در سیستم‌های پیچیده ممکن شود. نتیجه این راهکار در جدول ۲ قابل مشاهده است.

#### ۴- محاسبه مجموعه کمینه نامتغیر مثبت مقاوم

در این بخش در ابتدا، تخمین مجموعه mRPI به فرم اصلی بیان می‌شود و سپس در ادامه روش کاهش محاسبات بیان می‌شود.

##### ۴-۱- تخمین مجموعه mRPI

برای اطمینان از پایداری سیستم در برابر اغتشاشات خارجی نامعین و محدود، باید خطای میان سیستم واقعی و نامی، درون مجموعه mRPI قرار گیرد. پس از به دست آوردن mRPI، قیود سیستم نامی محافظه کاری شده و پایداری سیستم تضمین می‌شود. سپس مسئله بهینه‌سازی برای دینامیک سیستم نامی با قیود جدید حل می‌شود.

بر اساس مقاله [۱۳]، در ابتدا مقدار  $K$  پایدارساز را باید به نحوی محاسبه نمود تا دینامیک خطا پایدار باشد.  $F_\infty = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A^i W$  در واقع همان تیوب است، اما به دلیل اینکه عملاً جمع بی‌نهایت مجموعه برای محاسبه mRPI امکان‌پذیر نیست، باید آن را با نرخ  $\varepsilon$  مشخص شده، تخمین زد. مجموعه دست یافتنی  $s$  عبارت است از  $F_s = \bigoplus_{i=0}^{s-1} A^i W$  با فرض اینکه  $W$  و  $\mathbb{X}$  مجموعه‌هایی محدب هستند. اگر  $A$  اکیدا پایدار و برابر با  $A^s = \alpha I$  باشد به طوری که  $0 \leq \alpha < 1$  آنگاه  $F_s$  را می‌توان با یک تقریب درونی  $\varepsilon$  از  $F_\infty$  بیان کرد.

$$F_\infty \subseteq F(\alpha, s) = (1 - \alpha)^{-1} F_s \quad (27)$$

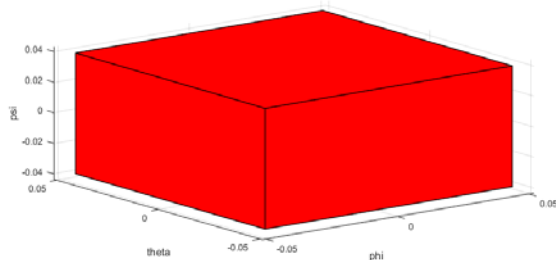
مقدار  $\alpha$  و  $s$  با توجه به مقدار  $\varepsilon$  تعیین می‌شوند و با افزایش  $s$  مقدار  $\alpha$  به ۰ نزدیک‌تر می‌شود. الگوریتم تعیین  $s$  مناسب در مقاله [۱۳] آمده است.

##### ۴-۲- کاهش محاسبات تخمین mRPI

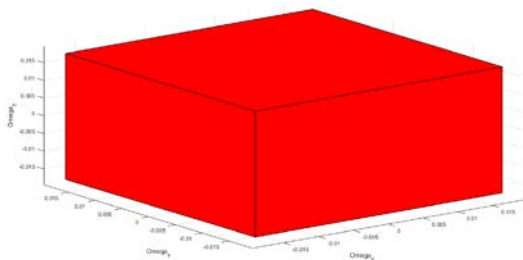
بر اساس آنچه بیان شد، پس از مشخص شدن  $s$  مناسب، طبق رابطه  $F_s = \bigoplus_{i=0}^{s-1} A^i W$ ، تخمین مجموعه‌ی mRPI به وسیله یک سلسله جمع مینکوفسکی به دست می‌آید. با استفاده از روش مقاله



در صورتی که از روش مقاله [۱۳] در تخمین مجموعه mRPI بخواهیم استفاده کنیم، با مقدار دقت  $\varepsilon = 10^{-5}$  به دلیل حجم بالای محاسبات امکان تخمین وجود ندارد. اگر چنانچه بخواهیم از روش مقاله [۱۳] همچنان استفاده کنیم باید به میزان زیادی دقت تخمین را پایین بیاوریم تا امکان محاسبه این مجموعه وجود داشته باشد. با فرض اینکه دقت تخمین را تا میزان  $\varepsilon = 10^{-2}$  کم کنیم، امکان تخمین مجموعه mRPI پس از صرف زمانی طولانی میسر شده، اما با چالش بعدی مواجه می‌شویم. تعداد رئوس این مجموعه ۵۶۴۱ بوده که عملاً امکان استفاده از این مجموعه در هنگام محافظه‌کاری قیود غیرممکن می‌شود. در ادامه با در نظر گرفتن مقدار  $\varepsilon = 10^{-5}$ ، با استفاده از راهکار کاهش حجم محاسبات ارائه شده در این مقاله، مقدار مجموعه‌ی mRPI به تعداد ۶۴ عدد می‌رسد. در شکل ۲- و شکل ۳- تصویر سه بعدی از این مجموعه قابل رویت است.



شکل ۲. تصویر سه بعدی مجموعه‌ی mRPI روی  $\psi$   $\theta$   $\phi$



شکل ۳. تصویر سه بعدی مجموعه‌ی mRPI روی  $\psi$   $\theta$   $\phi$

در ادامه، شکل‌های زیر نمایانگر حالت‌های سیستم واقعی (سیاه رنگ) و نامی (آبی رنگ) است. شکل‌های ۴ الی ۶ نشان‌دهنده زوایای اوپلر است.

جدول ۲. مدت زمان تخمین mRPI با کاهش محاسبات بر حسب ثانیه برای معادله حالت‌های با تعداد ورودی و خروجی‌های مختلف

خروجی / ورودی	۲	۳	۴
۱	۲۵.۶۴ ثانیه	۸۱.۲۴ ثانیه	۱۴۵.۸۹ ثانیه
۲	۲۵.۶۶ ثانیه	۸۱.۵۱ ثانیه	۱۴۷.۹۱ ثانیه
۳	۸۱.۳۶ ثانیه	۱۵۱.۳۵ ثانیه	

## ۵- شبیه‌سازی

ماهواره‌ای با پارامترهای جدول ۳ در نظر می‌گیریم:

جدول ۳ پارامترهای دینامیک ماهواره

parameter	value
$I_x$	4 [Kg. m <sup>2</sup> ]
$I_y$	4 [Kg. m <sup>2</sup> ]
$I_z$	3 [Kg. m <sup>2</sup> ]
$\omega_0$	0.0011 [rad/s]
$N$	30
sampling time	5s
$\varepsilon$	$10^{-5}$

محدودیت‌های زیر در زوایای اوپلر و مشتقات آن‌ها، گشتاورهای محرک و نرخ تغییرات گشتاور در نظر گرفته شده است:

$$X: \|x\|_{\infty} \leq 1 \quad (28)$$

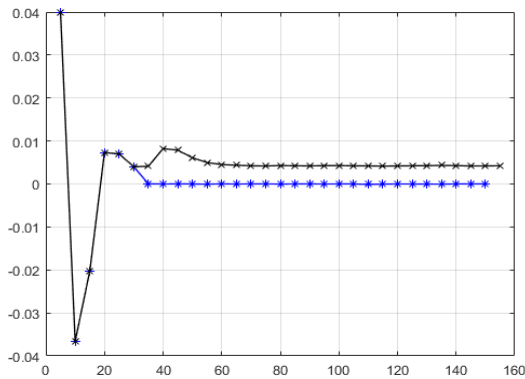
$$U_c: \|u_c\|_{\infty} \leq 0.03 \quad (29)$$

$$\Delta U_c: \|\Delta u_c\|_{\infty} \leq 0.1 \quad (30)$$

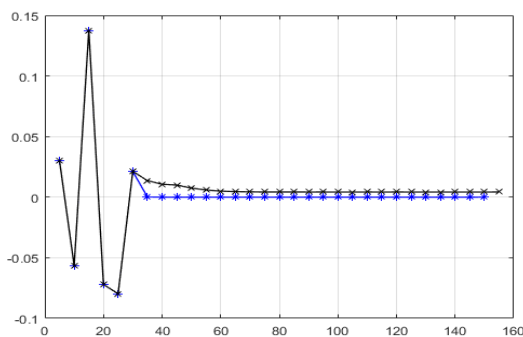
نتایج شبیه‌سازی تحت اغتشاش زیر به‌دست آمده است.

$$Bu_d = 10^{-2} \times [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1]^T \quad (31)$$

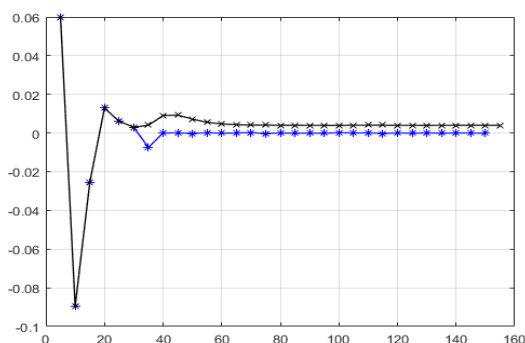
دهنده این بوده که سیستم واقعی در تمامی لحظات داخل تیوب-های حول مسیر نامی بوده و عملاً کنترل‌کننده پیش‌بین مبتنی بر تیوب نسبت به حداکثر مقدار اغتشاش مقاوم است. در ادامه شکل‌های ۷ الی ۱۰، نشان‌دهنده سرعت‌های زاویه‌ای است.



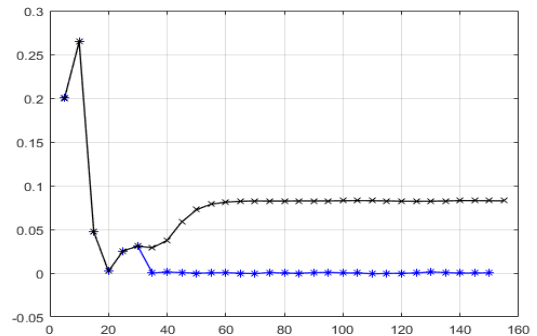
شکل ۷. سیگنال حقیقی و نامی  $\phi$



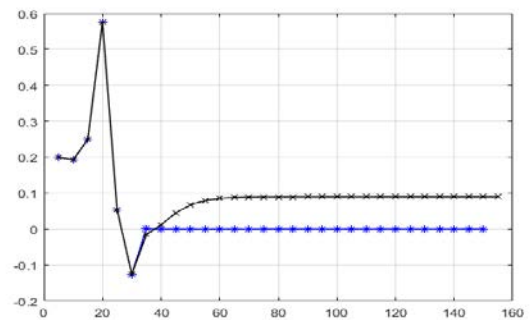
شکل ۸. سیگنال حقیقی و نامی  $\theta$



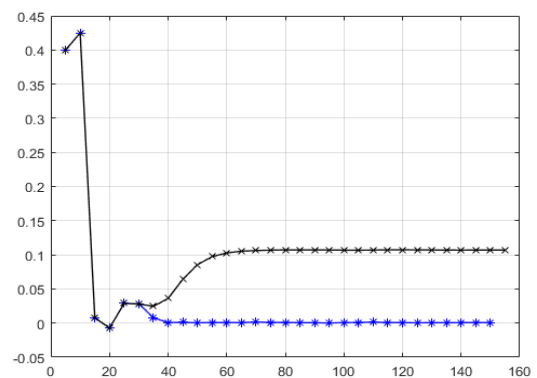
شکل ۹. سیگنال حقیقی و نامی  $\psi$



شکل ۴. سیگنال حقیقی و نامی  $\phi$



شکل ۵. سیگنال حقیقی و نامی  $\theta$



شکل ۶. سیگنال حقیقی و نامی  $\psi$

در این شبیه‌سازی، بیشترین اغتشاش ممکن به‌طور پیوسته به سیستم وارد شده است. همان‌طور که از شکل ۲- مشخص است، تیوب نسبت به زوایای اوپلر دارای حد بالای ۰.۱ است. از طرفی با بررسی شکل‌های ۴ الی ۶ مشخص بوده فاصله بین سیگنال‌های سیستم نامی و حقیقی بیش از ۰.۱ نشده است و این موضوع نشان

## مراجع

- [1] K. Alexis, G. Nikolakopoulos, and A. Tzes, "Switching model predictive attitude control for a quadrotor helicopter subject to atmospheric disturbances," *Control Eng. Pract.*, vol. 19, no. 10, pp. 1195–1207, 2011.
- [2] J. Yang, S. Li, X. Chen, and Q. Li, "Disturbance rejection of dead-time processes using disturbance observer and model predictive control," *Chem. Eng. Res. Des.*, vol. 89, no. 2, pp. 125–135, 2011.
- [3] W. Langson, I. Chrysoschoos, and S. V. Raković, "Robust model predictive control using tubes," *Automatica*, vol. 40, pp. 125–133, 2004.
- [4] D.Q. Mayne, M.M. Seron and S.V. Raković, "Robust model predictive control of constrained linear systems with bounded disturbances", *Automatica* Vol.41, PP 219-224, 2005.
- [5] S.V. Raković, D.Q. Mayne, "A simple tube controller for efficient robust model predictive control of constrained linear discrete time systems subject to bounded disturbances", *The International Federation of Automatica Control*, Luxenberg, Austria, July 2005.
- [6] Bayer, Florian A., Matthias A. Müller, and Frank Allgöwer. "Tube-based robust economic model predictive control." *Journal of Process Control*, Vol.24, No.8, pp. 1237-1246, 2014.
- [7] Bayer, Florian A., Matthias A. Müller, and Frank Allgöwer. "On optimal system operation in robust economic MPC." *Automatica*, Vol.88, pp. 98-106, 2017.
- [8] Mammarella, Martina, et al. "Attitude control of a small spacecraft via tube-based model predictive control." *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol.56, No.6, pp. 1662-1679, 2019.
- [9] Kim, Jongbum, Youeyun Jung, and Hyochoong Bang. "Linear time-varying model predictive control of magnetically actuated satellites in elliptic orbits." *Acta Astronautica*, Vol.151, pp. 791-804, 2018.
- [10] Pirouzmand, Fateme, and Nemat Ollah Ghahramani. "Robust model predictive control based on MRAS for satellite attitude control system." *The 3rd International Conference on Control, Instrumentation, and Automation. IEEE*, 2013.

در سه حالت، سرعت زاویه‌ای هم با توجه به مقدار تیوب این حالت‌ها می‌توان دریافت که مقدار اختلاف بین دو سیستم نامی و واقعی در  $\dot{\phi}$  کمتر از  $0.01$  و در  $\dot{\theta}$  و  $\dot{\psi}$  کمتر از  $0.02$  است. حال آنکه تیوب نسبت به سرعت‌های زاویه‌ای دارای حد بالای تیوب بیش از  $0.1$  است. در نتیجه سرعت‌های زاویه‌ای ماهواره به ازای حداکثر اغتشاش وارده درون تیوب قرار داشته و این مجدداً نشان‌دهنده مقاوم بودن طراحی نسبت اغتشاشات است.

## ۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله، برای کنترل وضعیت یک ماهواره دارای اغتشاش نامعین و محدود، طراحی کنترل‌کننده پیش‌بین مقاوم مبتنی بر تیوب انجام شد. کنترل‌کننده پیش‌بین مبتنی بر تیوب یک کنترل‌کننده برای مقابله با اغتشاش خارجی نامعین و محدود به سیستم است. این نکته واضح بوده که به دلیل وجود این اغتشاش خارجی نمی‌توان طراحی کنترل‌کننده را به طور مستقیم بر اساس سیستم نامی انجام داد. بنابراین، نیاز به افزایش محافظه‌کاری نسبت به اغتشاش است. این محافظه‌کاری با طراحی یک مجموعه نامتغیر مثبت مقاوم که در اینجا تیوب نامیده می‌شود، انجام شد. اما چالش اصلی طراحی کنترل‌کننده پیش‌بین مبتنی بر تیوب حجم زیاد محاسبات در حین طراحی تیوب برای سیستم‌های پیچیده است که عملاً انجام محاسبات را ناممکن می‌کند. راهکار پیشنهادی کاهش حجم محاسبات با استفاده از تقریب محیطی این مجموعه بیان شد. با استفاده از این راهکار، امکان طراحی TMPC برای دینامیک یک ماهواره، میسر شد. این راهکار که شامل تخمین تیوب در هر بار جمع مینکوفسکی است، باعث شد که حجم محاسبات کاهش پیدا نماید. طبق شبیه‌سازی‌های انجام شده نیز مشاهده شد که در هیچ زمانی فاصله بین دو سیستم واقعی و نامی بیش از محدوده مجاز در تیوب نشده که این موضوع نشان‌دهنده صحت عملکرد کنترل‌کننده طراحی شده است.

## تعارض منافع

هیچ‌گونه تعارض منافع توسط نویسندگان بیان نشده است.

- [11] Villanueva, Mario Eduardo, et al. "A set-theoretic generalization of dissipativity with applications in Tube MPC." *Automatica*, Vol.122, 2020.
- [12] Sebghati, Ashkan, and Saeed Shamaghdari. "Tube-based robust economic model predictive control with practical and relaxed stability guarantees and its application to smart grid." *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol.30, No.17, pp. 7533-7559, 2020.
- [13] S. V. Rakovic', E. C. Kerrigan, K. I. Kouramas, and D. Q. Mayne. "Invariant approximations of the minimal robust positively invariant set." *IEEE Transactions on automatic control*, Vol.50, No.3, pp. 406-410, 2005.
- [14] M.J. SIDI, *Spacecrafts Dynamics and Control: A Practical Engineering Approach*, Cambridge Areospace, Series 7, New York, 1997.
- [۱۵] ف. پیروزمند، ن. قهرمانی و م. ر. عاروان، "طراحی کنترل کننده پیش‌بین مقاوم با استفاده از نامساویهای ماتریسی خطی برای سیستم کنترل وضعیت ماهواره،" *مجله مهندسی برق دانشگاه تبریز*، جلد ۴۴، شماره ۴، صفحات ۱۰-۲۱، ۱۳۹۳.
- [۱۶] م. نوایی، پ. زارعی، "کنترل وضعیت ماهواره‌ی کوچک دارای کمبود عملگر با استفاده از کنترل پیش‌بین مدل،" *کنفرانس انجمن هوافضای ایران*، ۱۳۹۸.



## COPYRIGHTS

© 2022 by the authors. Licensee Iranian Space Research Center of Iran. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)