Journal of
Space Science, Technology
& Applications (Persian)

Vol. 1, No. 2, pp.: 147-166
2022

Available in:
Journal.isrc.ac.ir/article_146952.html

DOI:
10.22034/jssta.2022.315191.1038

Article Info

Received: 2021-11-16
Accepted: 2022-2-18

Keywords

Time-optimal control, Attitude and position dynamics, Orbital rendezvous maneuver, Pseudospectral method, Bang-Bang control structure

How to cite this article

Sayyed Majid Esmailifar, Sayyed Mohammad Mousavi , “Time-optimal Control of Spacecraft Rotational and Translational Dynamics in Orbital Rendezvous Maneuver”,*Journal of Space Science, Technology and Applications*, vol 1 (2), p.: 166-147, 2022.

Original Article

Time-optimal Control of Spacecraft Rotational and Translational Dynamics in Orbital Rendezvous Maneuver

Sayyed Mohammad Mousavi [1], Sayyed Majid Esmailifar [*,2], Mohammad Chiniforoushan [3]

1. Student, Department of Aerospace Engineering, Amirkabir University of Technology, msv.mohammad101@aut.ac.ir
2,*. Faculty member at Amirkabir University of technology, esmailifar@aut.ac.ir, Corresponding author
3. Researcher, Iranian Space Research Center, m.c.foroushan@aut.ac.ir

Abstract

In this research, the time-optimal 6 degrees of freedom (6DOF) orbital rendezvous maneuver problem for an inertially asymmetric rigid spacecraft with independent attitude and position control actuators has been investigated. It is also assumed that the spacecraft is equipped with the thruster actuators and the control forces and torques are generated along the three principal axes of the spacecraft. In order to obtain the time-optimal 6DOF maneuver state and control trajectories, at first, the relative translational and rotational dynamics of the spacecraft are described. Then, the Gauss pseudospectral method is used to solve the time-optimal control problem in the presence of constraints on control forces and torques. Also, the costates are estimated to first-order optimality proof of the obtained solutions. The Numerical simulation results show that for the assumed time-optimal 6DOF maneuver problem, the control structure for all of the control forces and torques is ‘bang-bang’. Eventually, the optimality of the obtained solutions is verified by checking the fulfillment of Pontrygain’s minimum principle.

مقاله پژوهشی

کنترل زمان بهینه وضعیت و موقعیت یک فضاپیما در مانور مجاورت مداری

سید محمد موسوی[1]، سید مجید اسماعیلی‌فر [2*]، محمد چینی‌فروشان[3]

۱. دانشجوی دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، msv.mohammad101@aut.ac.ir
۲،*. هیات علمی دانشگاه صنعتی امیرکبیر، esmailifar@aut.ac.ir (نویسنده مسئول)
۳. پژوهشگر پژوهشگاه فضایی ایران، m.c.foroushan@aut.ac.ir

چکیده

در این پژوهش مسئله مانور مجاورت مداری شش درجه آزادی زمان بهینه برای یک فضاپیمای صلب، نامتقارن[1] و با عملگرهای کنترلی مجزا برای کنترل وضعیت[2] و موقعیت[3] مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین فرض شده است که فضاپیما به عملگرهای تراستری مجهز است و نیروها و گشتاورهای کنترلی در جهت و حول سه محور ممان اینرسی اصلی فضاپیما ایجاد می‌شوند. برای به‌دست آوردن مسیرهای حالت و ورودی کنترلی مانور شش درجه آزادی زمان بهینه، در ابتدا دینامیک‌های انتقالی و دورانی نسبی فضاپیما توصیف شده‌اند. سپس، برای حل مسئله کنترل بهینه کمترین زمان با در نظرگرفتن قیود بر روی نیروها و گشتاورهای کنترلی، از روش شبه طیفی گاوس[4] استفاده شده است. همچنین، به منظور اثبات بهینگی مرتبه اول حل به‌دست آمده، تخمین کمک حالت انجام شده است. نتایج شبیه‌سازی عددی نشان می‌دهد که برای مسئله مانور شش درجه آزادی، زمان بهینه مورد نظر، ساختار کنترلی برای تمام نیروها و گشتاورهای کنترلی بنگ- بنگ[5] است. در نهایت نیز با استفاده از اصل کمینه پونتریاگین[6]، بهینگی مرتبه اول حل به‌دست آمده اثبات شده است.

1 Asymmetric
2 Attitude
3 Position
4 Gauss pseudospectral method
5 Bang-Bang
6 Pontrygain’s minimum principle

دو فصلنامه
علـوم، فـناوری و کاربردهـای فضـایی

سال اول، شماره ۲، صفحه ۱۶۶-۱۴۷
پاییز و زمستان ۱۴۰۰

دسترس‌پذیر در نشانی:
Journal.isrc.ac.ir/article_146952.html

DOI:
10.22034/jssta.2022.315191.1038

تاریخچه داوری

دریافت: ۱۴۰۰/۰۸/۲۵

پذیرش: ۱۴۰۰/۱۱/۲۹

واژه‌های کلیدی

کنترل بهینه کمترین زمان، مانور مجاورت مداری، دینامیک انتقالی و دورانی، روش شبه طیفی گاوس، ساختار کنترلی بنگ- بنگ

نحوه استناد به این مقاله

سید محمد موسوی، سید مجید اسماعیلی‌فر" کنترل زمان بهینه وضعیت و موقعیت یک فضاپیما در مانور مجاورت مداری"، *دوفصلنامه علوم، فناوری و کاربردهای فضایی*، جلد اول، شماره دوم، صفحات۱۴۷-۱۶۶، ۱۴۰۰.

علائم و اختصارات

ماتریس اینرسی فضاپیمای تعقیب‌کننده	I_B
عملگر مشتق زمانی دورانی نسبت به دستگاه دلخواه α	D^{α}
بردار سرعت زاویه‌ای دستگاه بدنی تعقیب‌کننده نسبت به دستگاه مرجع مداری هدف با مولفه‌های $\omega_i, i = 1,2,3$	ω^{BL}
بردار سرعت زاویه‌ای دستگاه مرجع مداری هدف نسبت به دستگاه اینرسی زمین-مرکز	ω^{LI}
بردار سرعت زاویه‌ای دستگاه بدنی تعقیب‌کننده نسبت به دستگاه اینرسی زمین-مرکز	ω^{BI}
بردار گشتاورهای کنترلی وارد بر فضاپیمای تعقیب‌کننده با مولفه‌های $T_i, i = 1,2,3$	T
بردار پارامترهای رودریگز اصلاح‌یافته با مولفه‌های $\sigma_i, i = 1,2,3$	σ
مولفه‌های بردار اصلی اویلر به ازای $i = 1,2,3$	e_i
زاویه دوران حول محور اصلی اویلر	Φ
بردار سرعت مرکز جرم فضاپیمای تعقیب‌کننده نسبت به دستگاه مرجع مداری هدف	v_B^L
بردار موقعیت مرکز جرم فضاپیمای تعقیب‌کننده نسبت به دستگاه مرجع مداری هدف	s_{BL}
جرم فضاپیمای تعقیب‌کننده	m
سرعت زاویه‌ای مداری	ω_n
بردار نیروهای کنترلی وارد بر فضاپیمای تعقیب‌کننده با مولفه‌های $F_i, i = 1,2,3$	F
ماتریس انتقال از دستگاه بدنی تعقیب‌کننده به دستگاه مرجع مداری هدف	T^{LB}
تابع هزینه	J
بردار حالت	$x(t)$
بردار ورودی کنترلی	$u(t)$
زمان	t
جمله‌ی مربوط به قیود مرزی در تابع هزینه	Φ
جمله‌ی زیر انتگرال در تابع هزینه	g
بردار توابع حالت	f
قیود مرزی	ϕ
قیود مساوی و نامساوی مسیر	C
متغیر زمان در روش شبه طیفی گاوس	τ
مسیر حالت تقریب‌زده‌شده با چندجمله‌ای‌های لاگرانژ	$X(\tau)$
تعداد نقاط تطبیق	N
چندجمله‌ای لاگرانژ (برازش بر نقاط تطبیق و نقطه‌ی ابتدایی)	L
چندجمله‌ای لاگرانژ (برازش بر نقاط تطبیق)	L^*
مسیر ورودی کنترلی تقریب‌زده‌شده با چندجمله‌ای‌های لاگرانژ	$U(\tau)$
ماتریس مشتق‌گیری	D
وزن‌های گاوسی برای نقاط تطبیق	w
قیود مرزی در مسئله‌ی با چند زیربازه	$\mathcal{L}$
تابع همیلتونین	H
بردار کمک‌حالت	λ
بردار ضرائب لاگرانژ مربوط به قیود مسیر	μ
بردار ضرائب لاگرانژ مربوط به شرایط مرزی	ν
ضرائب KKT	$\widetilde{\Lambda}$
بردار کمک‌حالت تخمین‌زده‌شده	Λ
تعداد نقاط تطبیق در هر زیربازه	n
تعداد زیربازه‌ها	n_I
کران پایین متغیرهای حالت و ورودی کنترلی در تمام نقاط تطبیق و t_f	B_l
کران بالای متغیرهای حالت و ورودی کنترلی در تمام نقاط تطبیق و t_f	B_u
حدس اولیه متغیرهای حالت و ورودی کنترلی در تمام نقاط تطبیق و t_f	S_0
حل بهنیه بدست‌آمده از حل مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی	S_{opt}

بالانویس‌ها

دستگاه بدنی تعقیب‌کننده	B
دستگاه مرجع مداری هدف	L

پایین نویس‌ها

مربوط به زمان ابتدایی	0
مربوط به زمان انتهایی	f

۱- مقدمه

استفاده از مانور زمان بهینه در وسائل نقلیه هوافضایی یکی از موضوعات مورد علاقه در حوزه‌های مختلف مهندسی هوافضا است. به‌طور خاص در ماموریت‌های فضایی، مانور وضعیت زمان بهینه در کاربردهایی مانند مانور نشانه‌روی برای تنظیم جهت‌گیری آنتن فضاپیماهای مخابراتی، مانور وضعیت ماهواره‌های تصویربرداری برای رهگیری چند هدف بر روی زمین یا مانور وضعیت تلسکوپ‌های فضایی برای مشاهده اجرام آسمانی استفاده می‌شود [۱]. علاوه‌بر مانور وضعیت زمان بهینه، مانور شش درجه آزادی شامل مانور هم‌زمان وضعیت و موقعیت نیز می‌تواند مورد توجه واقع شود. این مانور را می‌توان به عنوان یک مود عملیاتی در شرایط اضطراری، برای مانور مجاورت و اتصال یک فضاپیما با فضاپیمای دیگر مانند ایستگاه فضایی بین‌المللی در نظرگرفت [۲-۴].

مانور وضعیت زمان بهینه در پژوهش‌های متعددی مورد مطالعه قرار گرفته است. بیلیموریا[1] و وای[2] [۵]، مسئله مانور وضعیت زمان بهینه برای یک فضاپیمای متقارن[3] و صلب، با فرض سه محور کنترلی متعامد و قید مکعبی[4] بر روی گشتاورهای کنترلی (مقدار مولفه‌های بردار ورودی کنترلی از یک مقدار مشخص کمتر باشد)، را مورد بررسی قرار داده‌اند. نتایج ارائه شده در این مرجع نشان می‌دهد که مانور چرخش حول محور اصلی اویلر زمان بهینه نیست و ساختار ورودی کنترلی زمان بهینه در هر سه محور کنترلی به‌صورت بنگ- بنگ است. بای[5] و جانکینز[6] [۶]، نتایج جدیدی برای مانور وضعیت بررسی شده در مرجع [۵]، ارائه داده‌اند. در این مرجع، نشان داده شده است که ساختار ورودی کنترلی زمان بهینه برای یک مانور وضعیت مشخص، یکتا نیست. همچنین با فرض قید کروی[7] بر روی گشتاورهای کنترلی (نرم دوم بردار ورودی کنترلی از یک مقدار مشخص کمتر باشد)، مانور چرخش حول محور اصلی اویلر زمان بهینه است. شِن[8] و چیوترَس[9] [۷]، مانور وضعیت زمان بهینه برای یک فضاپیمای متقارن محوری[10] و تحریک ناقص[11] را بررسی کرده‌اند.

در تعدادی از پژوهش‌ها، مسئله مانور وضعیت زمان بهینه برای یک فضاپیمای نامتقارن با در نظر گرفتن مفروضات مختلف حل شده است. هو[12] و همکاران [۸]، مانور وضعیت زمان بهینه را برای یک فضاپیمای دارای اجزای منعطف و با در نظر گرفتن مانور وضعیت هموار[13] مورد مطالعه قرار داده‌اند. جین سونگ[14] و همکاران [۹]، مسئله مانور وضعیت زمان بهینه را برای یک فضاپیما با عملگرهای مغناطیسی حل کرده‌اند. اُلیوَریس[15] و اِستافِتی[16] [۱۰]، مسئله مانور وضعیت زمان بهینه را برای یک فضاپیمای تحریک ناقص، با عملگرهای چرخ عکس‌العملی و تراستر برای ایجاد گشتاور حول دو محور ممان اینرسی اصلی، بررسی کرده‌اند. در این مرجع مقدار گشتاورهای کنترلی عملگرها و ماکزیمم اندازه حرکت زاویه‌ای چرخ‌های عکس‌العملی مقید شده‌اند. همچنین اُلیوَریس و اِستافِتی [۱۱]، مسئله مانور وضعیت زمان بهینه را برای یک مانور چندهدفه با در نظر گرفتن قیود بر روی مقدار گشتاورهای کنترلی، ماکزیمم اندازه حرکت زاویه‌ای چرخ‌های عکس‌العملی و همچنین ماکزیمم سرعت زاویه‌ای فضاپیما، مورد بررسی قرار داده‌اند. در بعضی از مراجع مسئله مانور وضعیت زمان بهینه، با فرض وجود قیود بر روی وضعیت فضاپیما حل شده است [۱۲-۱۵].

یافتن مانور زمان بهینه منجر به یک مسئله کنترل بهینه کمترین زمان می‌شود که غالبا برای حل آن از روش‌های حل عددی استفاده می‌شود. از نقطه نظر روش‌های حل مسئله کنترل

1 Bilimoria
2 Wie
3 Symmetric
4 Cubical constraint
5 Bai
6 Junkins
7 Spherical constraint
8 Shen
9 Tsiotras
10 Axisymmetric
11 Underactuated
12 Hu
13 Smooth attitude maneuver
14 Jinsong
15 Olivares
16 Staffetti

بهینه، روش‌هایی مانند روش پرتابی[1] [۷-۵]، روش شبه‌طیفی[2] [۸, ۱۳, ۱۶]، روش هموتوپی[3] [۱۷, ۱۸]، ترکیب روش‌های شبه طیفی و هموتوپی [۱۹, ۲۰]، ترکیب روش‌های تکاملی مانند ازدحام ذرات[4]، تکامل تفاضلی[5] و کاوش باکتری[6] با روش شبه‌طیفی [۲۱]، ترکیب روش‌های دینامیک معکوس[7] و روش ترمیم شیب متوالی[8] [۲۲]، ترکیب روش‌های دینامیک معکوس و شبه‌طیفی [۱۵] و همچنین ترکیب روش‌های دینامیک معکوس و ازدحام ذرات [۱۲, ۲۳, ۲۴] برای یافتن مانور وضعیت زمان بهینه یک فضاپیما استفاده شده‌اند. اخیرا نیز روش‌هایی مانند برنامه‌ریزی محدب متوالی[9] [۲۵] و بهینه‌سازی فاقد مشتق[10] [۲۶] نیز برای حل این مسئله به‌کار رفته‌اند. لازم به ذکر است که استفاده از بعضی از این روش‌ها برای حل مسئله کنترل بهینه، منجر به حل نزدیک بهینه می‌شود.

به‌طور کلی، روش‌های عددی برای حل مسئله کنترل بهینه به دو دسته روش‌های مستقیم[11] و غیرمستقیم[12] تقسیم می‌شوند [۳۲-۲۷]. در روش‌های غیرمستقیم، با استفاده از حساب تغییرات و اصل کمینه پونتریاگین [۳۳]، شرایط بهینگی مرتبه اول زمان- پیوسته به‌صورت یک مسئله مقدار مرزی در دو نقطه مجزا[13] به‌دست می‌آید. این مسئله شامل دو دسته معادلات دیفرانسیل حالت و کمک‌حالت است و برای حل آن از روش پرتابی استفاده می‌شود [۲۸]. با توجه به آن‌که برای متغیرهای کمک‌حالت تعبیر فیزیکی وجود ندارد، یافتن حدس اولیه مناسب برای شرایط اولیه متغیرهای کمک‌حالت در روش پرتابی، دشوار است. در روش‌های مستقیم، مسئله کنترل بهینه زمان- پیوسته با استفاده از روش‌های گسسته‌سازی، گسسته شده و به یک مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی[14] تبدیل می‌شود [۲۸]. سپس مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی با استفاده از روش‌های بهینه‌سازی مانند روش‌های مبتنی بر شیب[15] و روش‌های تکاملی[16] حل می‌شود [۲۹]. یک دسته از روش‌های مستقیم، روش‌های تطبیقی سراسری[17] هستند [۲۹, ۳۰, ۳۴]. در این روش‌ها، مسیرهای حالت و ورودی کنترلی در نقاط تطبیق گسسته شده و با استفاده از چندجمله‌ای‌های سراسری تقریب زده می‌شوند. یک دسته از روش‌های تطبیقی سراسری که در سال‌های اخیر توسعه یافته‌اند، روش‌های شبه‌طیفی هستند. از جمله این روش‌ها می‌توان به روش شبه‌طیفی گاوس [۳۹-۳۵]، روش شبه‌طیفی لوباتو[18] [۴۰] و [۴۱] و روش شبه‌طیفی رادائو[19] [۴۴-۴۲] اشاره کرد. با استفاده از روش‌های شبه‌طیفی، قیود دینامیکی زمان- پیوسته، گسسته شده و به قیود جبری تبدیل می‌شوند. قیود دینامیکی، قیود مسیر و قیود مرزی به همراه تابع هزینه، مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی را تشکیل می‌دهند.

در روش شبه‌طیفی گاوس، شرایط بهینگی مرتبه اول برای حل مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی (شرایط KKT[20]) معادل فرم گسسته شده شرایط بهینگی مرتبه اول زمان -پیوسته هستند [۳۵, ۳۶]. در این حالت مجموعه ضرائب KKT که از حل مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی به‌دست می‌آیند، متناظر با مقدار متغیرهای کمک حالت در نقاط تطبیق هستند. بنابراین، با حل مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی و به‌دست آوردن ضرائب KKT، می‌توان از این ضرائب برای تخمین مسیرهای کمک‌حالت استفاده کرد. با استفاده از مسیرهای متغیر کمک‌حالت می‌توان بهینگی مرتبه اولِ حلِ به‌دست آمده را اثبات‌کرد.

در این پژوهش، مسئله مانور شش درجه آزادی زمان بهینه شامل مانور هم‌زمان وضعیت و موقعیت، مورد بررسی قرار گرفته

1 Shooting method
2 Pseudospectral method
3 Homotopy method
4 Particle swarm optimization (PSO)
5 Differential evolution (DE)
6 Bacteria foraging optimization (BFO)
7 Inverse-dynamics
8 Sequential gradient-restoration
9 Sequential convex programming (SCP)
10 Derivative-free optimization
11 Direct methods
12 Indirect methods
13 Two-point boundary value problem (TPBVP)
14 Nonlinear programming (NLP)
15 Gradient-based methods
16 Heuristic algorithms
17 Global collocation methods
18 Lobatto Pseudospectral method
19 Radau Pseudospectral method
20 Karush-Kuhn-Tucker conditions

است. به‌عنوان نمونه، این مسئله برای انجام مانور مجاورت یک فضاپیمای تعقیب‌کننده[1] با یک فضاپیمای هدف[2]، فرمول‌بندی شده و با استفاده از روش شبه‌طیفی گاوس حل شده است. ملاحظاتی از جمله متقارن یا نامتقارن بودن فضاپیما، درنظر گرفتن دینامیک مداری در مدل‌سازی دینامیک‌های انتقالی و دورانی فضاپیما و همچنین درنظر گرفتن کوپلینگ میان کنترل وضعیت و موقعیت فضاپیما، پیچیدگی مسئله و حل به‌دست آمده برای آن را تحت تاثیر قرار می‌دهد. در حل این مسئله فرض‌شده که عملگرهای تراستری کنترل وضعیت و موقعیت، مجزا و نسبت به دستگاه بدنی ثابت هستند. در این حالت ورودی کنترلی بهینه برای کنترل موقعیت فضاپیما، تحت تاثیر وضعیت آن خواهد بود و بین کنترل وضعیت و موقعیت فضاپیما کوپلینگ وجود دارد. بر اساس مطالعات انجام شده بر روی پیشینه پژوهش حاضر، نوآوری این پژوهش در موارد زیر است:

- توسعه مسئله مانور وضعیت زمان بهینه به مسئله مانور شش درجه آزادی زمان بهینه شامل مانور هم‌زمان وضعیت و موقعیت، برای یک فضاپیمای نامتقارن،
- اعمال دینامیک مداری و کوپلینگ میان کنترل وضعیت و موقعیت در مدل‌سازی دینامیکی فضاپیما،
- ارائه حل بهینه برای مسئله مذکور به‌گونه‌ای که حل به‌دست آمده شرایط بهینگی مرتبه اول را برآورده می‌کند.

به‌طور کلی در سیستم‌های دینامیکی غیرخطی و مرتبه بالا ($n \geq 3$)، برای مسئله کنترل بهینه کمترین زمان، حل بسته[3] وجود ندارد و حل این مسئله با روش‌های متداول در کنترل بهینه (روش‌های مستقیم و غیرمستقیم) منجر به یک ساختار کنترلی حلقه باز می‌شود [۴۵]. در کاربردهای واقعی به‌منظور دستیابی به عملکرد مقاوم سیستم نسبت به عدم قطعیت‌ها و اغتشاشات باید یک قانون کنترلی حلقه بسته برای ردیابی مسیرهای حالت بهینه طراحی شود. بنابراین، در حل مسئله کنترل بهینه کمترین زمان و به‌دست آوردن مسیرهای حالت و ورودی کنترلی بهینه می‌توان از اثر عدم قطعیت‌ها، اغتشاشات و همچنین مدل‌سازی دینامیک عملگرها صرف نظر کرد و اثرات آنها را در طراحی قانون کنترلی حلقه بسته اعمال کرد.

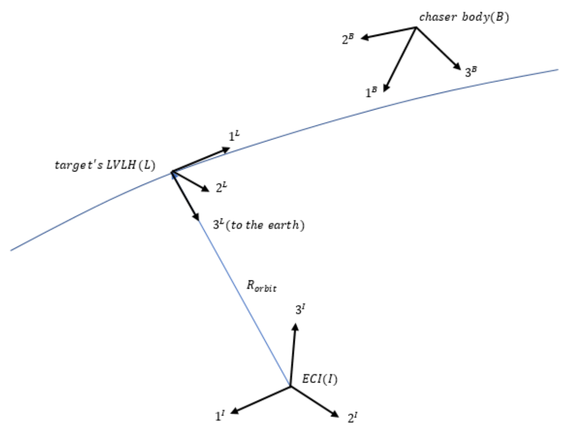
در ادامه، ابتدا مدل دینامیکی نسبی فضاپیمای تعقیب‌کننده نسبت به فضاپیمای هدف بیان می‌شود. سپس، مسئله کنترل بهینه کمترین زمان تعریف شده و با استفاده از روش شبه‌طیفی گاوس به مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی تبدیل می‌شود. با حل مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی، مسیرهای حالت و ورودی کنترلی زمان بهینه به‌دست می‌آیند. مانند بسیاری از مسئله‌های کنترل بهینه کمترین زمان، مسیرهای ورودی کنترلی بنگ- بنگ هستند که از نظر سیستمی این ورودی کنترلی را می‌توان با استفاده از تراسترهای on-off به فضاپیما اعمال کرد. در انتها، با استفاده از ضرائب KKT به‌دست آمده از حل مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی، مسیرهای کمک‌حالت تخمین‌زده شده و اثبات بهینگی مرتبه اول، مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۲- مدل دینامیکی نسبی

زمانی که فاصله نسبی بین دو فضاپیما زیاد باشد، حرکت انتقالی آنها معمولا در دستگاه مختصات اینرسی زمین-مرکز[4] توصیف می‌شود. زمانی که فاصله بین دو فضاپیما در مقایسه با فاصله شعاعی آنها تا مرکز جرم زمین، بسیار کم باشد، معمولا حرکت انتقالی نسبی آنها در دستگاه مختصات مرجع مداریِ[5] فضاپیمای هدف توصیف می‌شود. مرکز این دستگاه، مختصات منطبق بر مرکز جرم فضاپیمای هدف است و محورهای آن به این صورت تعریف می‌شوند: محور z به صورت شعاعی به سمت مرکز جرم زمین است. محور x در صفحه مدار، عمود بر محور z و در جهت بردار سرعت است. محور y عمود بر صفحه مدار و کامل‌کننده قانون دست راست است. دستگاه مختصات اینرسی زمین- مرکز، دستگاه مختصات مرجع مداری فضاپیمای هدف و

1 Chaser spacecraft
2 Target spacecraft
3 Closed-form solution
4 Earth-centered inertial coordinate system (ECI)
5 Local vertical-local horizontal coordinate system (LVLH)

دستگاه مختصات بدنی فضاپیمای تعقیب‌کننده در شکل ۱ نشان داده شده است.



شکل ۱. دستگاه مختصات اینرسی زمین- مرکز $\boldsymbol{I}$، دستگاه مختصات مرجع مداری فضاپیمای هدف $\boldsymbol{L}$، دستگاه مختصات بدنی فضاپیمای تعقیب‌کننده $\boldsymbol{B}$

با فرض اینکه دستگاه بدنی هدف منطبق بر دستگاه مرجع مداری هدف است، برای یک مانور مجاورت می‌توان دینامیک دورانی نسبی دستگاه بدنی تعقیب کننده را نسبت به دستگاه مرجع مداری هدف توصیف کرد. برای توصیف دینامیک دورانی دستگاه بدنی تعقیب کننده نسبت به دستگاه مرجع مداری هدف که یک دستگاه غیراینرسیایی است از فرم برداری معادله اویلر در معادله (۱) استفاده می‌شود [۴۶]:

$$\begin{aligned} I_B[D^B[\omega^{BL}]^B] + [\omega^{BL}]^B \times (I_B[\omega^{BL}]^B) \\ + I_B[D^L[\omega^{LI}]^B] \\ + [\omega^{LI}]^B \times (I_B[\omega^{BI}]^B) \\ = [T]^B \end{aligned} \tag{۱}$$

که در آن حروف B، L و I به ترتیب بیانگر دستگاه بدنی تعقیب کننده، دستگاه مرجع مداری هدف و دستگاه اینرسی زمین- مرکز هستند. D^B بیانگر عملگر مشتق زمانی دورانی نسبت به دستگاه بدنی تعقیب‌کننده است. ماتریس $I_B = diag([I_1, I_2, I_3]) \in \mathbb{R}^{3\times3}$، ماتریس اینرسی فضاپیمای تعقیب کننده حول محورهای ممان اینرسی اصلی آن است. در اینجا فرض‌شده که محورهای دستگاه بدنی تعقیب کننده بر محورهای ممان اینرسی اصلی آن منطبق است. بردارهای $[\omega^{BL}]^B = [\omega_1, \omega_2, \omega_3]^T \in \mathbb{R}^3$، $[\omega^{LI}]^B \in \mathbb{R}^3$ و $[\omega^{BI}]^B \in \mathbb{R}^3$ به ترتیب بیانگر بردارهای سرعت زاویه‌ای دستگاه بدنی تعقیب کننده نسبت به دستگاه مرجع مداری هدف، سرعت زاویه‌ای دستگاه مرجع مداری هدف نسبت به دستگاه اینرسی زمین- مرکز و سرعت زاویه‌ای دستگاه بدنی تعقیب کننده نسبت به دستگاه اینرسی زمین- مرکز هستند. این سه بردار در دستگاه بدنی تعقیب‌کننده بیان شده‌اند. بردار $[T]^B = [T_1, T_2, T_3]^T \in \mathbb{R}^3$ بیانگر بردار گشتاورهای کنترلی وارد بر فضاپیمای تعقیب کننده است و در دستگاه بدنی تعقیب کننده بیان شده است. با فرض اینکه فضاپیمای هدف در مدار دایروی قرار داشته باشد، بردار ω^{LI} ثابت است. در نتیجه، معادله اویلر در معادله (۱) به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} I_B[D^B[\omega^{BL}]^B] + [\omega^{BL}]^B \times (I_B[\omega^{BL}]^B) \\ + [\omega^{LI}]^B \times (I_B[\omega^{BI}]^B) \\ = [T]^B \end{aligned} \tag{۲}$$

به‌منظور توصیف سینماتیک دورانی دستگاه بدنی تعقیب کننده نسبت به دستگاه مرجع مداری هدف، از پارامترهای رودریگز اصلاح‌یافته[1] استفاده شده است. این پارامترها به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\sigma = [\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3]^T = \begin{bmatrix} e_1 \tan(\frac{\Phi}{4}) \\ e_2 \tan(\frac{\Phi}{4}) \\ e_3 \tan(\frac{\Phi}{4}) \end{bmatrix} \tag{۳}$$

1 Modified Rodrigues parameters (MRP)

که در آن e_1، e_2 و e_3 مولفه‌های بردار اصلی اویلر و زاویه Φ بیانگر زاویه دوران حول محور اصلی اویلر است. معادله دیفرانسیل سینماتیک دورانی با استفاده از پارامترهای رودریگز اصلاح‌یافته، در فرم برداری به‌صورت معادله (۴) بیان می‌شود [۴۷]:

$$\dot{\sigma} = \frac{1}{4} B(\sigma)[\omega^{BL}]^{B} \tag{۴}$$

با تعریف $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2$، ماتریس $B(\sigma)$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$B(\sigma) = \begin{bmatrix} 1-\sigma^2+2\sigma_1^2 & 2(\sigma_1\sigma_2-\sigma_3) & 2(\sigma_1\sigma_3+\sigma_2) \\ 2(\sigma_2\sigma_1+\sigma_3) & 1-\sigma^2+2\sigma_2^2 & 2(\sigma_2\sigma_3-\sigma_1) \\ 2(\sigma_3\sigma_1-\sigma_2) & 2(\sigma_3\sigma_2+\sigma_1) & 1-\sigma^2+2\sigma_3^2 \end{bmatrix} \tag{۵}$$

به‌منظور توصیف دینامیک و سینماتیک انتقالی فضاپیمای تعقیب کننده نسبت به دستگاه مرجع مداری هدف، با فرض اینکه فاصله نسبی بین دو فضاپیمای تعقیب کننده و هدف به‌نسبت فاصله شعاعی آنها تا مرکز زمین بسیار کم باشد و در شرایطی که اغتشاشات مداری قابل صرف‌نظر باشند، از معادله (۶) استفاده می‌شود [۴۸]. این معادله با نام معادله «هیلز»[۱] شناخته می‌شود:

$$\begin{bmatrix} D^L[v_B^L]^L \\ D^L[s_{BL}]^L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{3\times3} & N_{3\times3} \\ -I_3 & 0_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [v_B^L]^L \\ [s_{BL}]^L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m}[F]^L \\ 0_{3\times1} \end{bmatrix}$$
$$M_{3\times3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2\omega_n \\ 0 & 0 & 0 \\ 2\omega_n & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{۶}$$
$$N_{3\times3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_n^2 & 0 \\ 0 & 0 & -3\omega_n^2 \end{bmatrix}$$

که در آن ω_n، سرعت زاویه‌ای مداری و m جرم فضاپیمای تعقیب کننده است. D^L، بیانگر عملگر مشتق زمانی دورانی نسبت به دستگاه مرجع مداری هدف است. بردارهای $[v_B^L]^L = [v_1, v_2, v_3]^T \in \mathbb{R}^3$ و $[s_{BL}]^L = [s_1, s_2, s_3]^T \in \mathbb{R}^3$ به ترتیب بیانگر بردارهای سرعت و موقعیت مرکز جرم فضاپیمای تعقیب کننده نسبت به دستگاه مرجع مداری هدف هستند. این دو بردار، در دستگاه مرجع مداری هدف بیان شده‌اند. بردار $[F]^L \in \mathbb{R}^3$، بیانگر بردار نیروهای کنترلی وارد بر فضاپیمای تعقیب کننده است و در دستگاه مرجع مداری هدف بیان شده است.

با توجه به آن‌که مولفه‌های نیروهای کنترلی معمولا در دستگاه بدنی فضاپیمای تعقیب کننده بیان می‌شوند، بنابراین، برای به‌دست آوردن مولفه‌های نیروی کنترلی در دستگاه مرجع مداری هدف باید تبدیل زیر انجام شود:

$$[F]^L = T^{LB}[F]^B \tag{۷}$$

که در آن $[F]^B = [F_1, F_2, F_3]^T \in \mathbb{R}^3$، بیانگر بردار نیروهای کنترلی وارد بر فضاپیمای تعقیب‌کننده در دستگاه بدنی تعقیب کننده است. همچنین T^{LB}، بیانگر ماتریس انتقال از دستگاه بدنی تعقیب کننده به دستگاه مرجع مداری هدف است.

۳- تعریف مسئله کنترل بهینه

مسئله کنترل بهینه در فرم کلی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

کمینه‌سازی تابع هزینه به فرم بولزا[۲] در معادله (۸)، به‌گونه‌ای که قیود مسئله شامل قیود دینامیکی، شرایط مرزی و قیود نامساوی مسیر که به ترتیب در معادلات (۹) تا (۱۱) بیان‌شده‌اند، برآورده شوند:

1 Hill's equations

2 Bolza

$$J = \phi\big(x(t_0), t_0, x(t_f), t_f\big) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t)dt \qquad (۸)$$

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), u(t), t) \qquad (۹)$$

$$\phi\big(x(t_0), t_0, x(t_f), t_f\big) = 0 \qquad (۱۰)$$

$$C(x(t), u(t), t) \leq 0 \qquad (۱۱)$$

که $x(t) \in \mathbb{R}^n$ و $u(t) \in \mathbb{R}^m$ به ترتیب بیانگر بردارهای حالت و ورودی کنترلی و t_0 و t_f به ترتیب بیانگر زمان ابتدایی و زمان انتهایی بازه حل مسئله هستند. بر این اساس، مسئله کنترل بهینه کمترین زمان وضعیت و موقعیت فضاپیما به‌صورت شش درجه آزادی، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

کمینه‌سازی تابع هزینه در معادله (۱۲) به‌گونه‌ای که قیود دینامیکی، شرایط مرزی و قیود بر روی نیروها و گشتاورهای کنترلی، که به ترتیب در معادلات (۱۳) تا (۱۵) بیان‌شده‌اند، برآورده شوند:

$$J = t_f \qquad (۱۲)$$

$$D^B[\omega^{BL}]^B = I_B^{-1}\big([T]^B - [\omega^{BL}]^B \times (I_B[\omega^{BL}]^B) - [\omega^{LI}]^B \times (I_B[\omega^{BI}]^B)\big)$$

$$\dot{\sigma} = \frac{1}{4}B(\sigma)[\omega^{BL}]^B \qquad (۱۳)$$

$$\begin{bmatrix} D^L[v_B^L]^L \\ D^L[s_{BL}]^L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m}T^{LB}[F]^B \\ 0_{3\times1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_{3\times3} & N_{3\times3} \\ -I_3 & 0_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [v_B^L]^L \\ [s_{BL}]^L \end{bmatrix}$$

$$M_{3\times3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2\omega_n \\ 0 & 0 & 0 \\ 2\omega_n & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$N_{3\times3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_n^2 & 0 \\ 0 & 0 & -3\omega_n^2 \end{bmatrix}$$

$$x_0 = [[\omega^{BL}]^B, \sigma, [v_B^L]^B, [s_{BL}]^B]_{t=t_0}^T$$
$$x_f = [[\omega^{BL}]^B, \sigma, [v_B^L]^B, [s_{BL}]^B]_{t=t_f}^T \qquad (۱۴)$$

$$|T_i| \leq T_{i,max}, \qquad i = 1,2,3$$
$$|F_i| \leq F_{i,max}, \qquad i = 1,2,3 \qquad (۱۵)$$

در این مسئله بردار حالت و ورودی کنترلی به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$x = [[\omega^{BL}]^B, \sigma, [v_B^L]^L, [s_{BL}]^L]^T$$
$$u = [[T]^B, [F]^B]^T \qquad (۱۶)$$

۴- روش شبه‌طیفی گاوس

مسئله کنترل بهینه توصیف شده در معادلات (۱۲) تا (۱۵) با استفاده از روش‌های حل عددی قابل حل است. یک دسته از روش‌های حل عددی مسائل کنترل بهینه، روش‌های شبه‌طیفی هستند. در این روش‌ها با گسسته‌سازی مسیرهای حالت و ورودی کنترلی در نقاط تطبیق و با استفاده از برازش چندجمله‌ای‌های لاگرانژ[1] بر این نقاط، مسیرهای حالت و ورودی کنترلی تقریب زده می‌شوند. پس از آن برآورده‌سازی قیود دینامیکی تنها در نقاط

1 Lagrange interpolating polynomials

تطبیق مورد بررسی قرار گرفته و بدین ترتیب، قیود دینامیکی به یک مجموعه قیود جبری تبدیل می‌شوند. با این تبدیل، مسئله کنترل بهینه زمان- پیوسته گسسته شده و به یک مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی تبدیل می‌شود. در این پژوهش، برای حل مسئله کنترل بهینه از روش شبه‌طیفی گاوس استفاده شده است.

در این روش نقاط تطبیق، ریشه‌های چندجمله‌ای لژاندر[1] هستند و با نام نقاط «لژاندر-گاوس»[2] شناخته می‌شوند. از آنجایی‌که این نقاط در بازه $(-1,1)$ قرارمی‌گیرند، باید بازه زمانی حل مسئله کنترل بهینه، با استفاده از تبدیل بیان شده در معادله (۱۷)، از $t \in [t_0, t_f]$ به $\tau \in [-1,1]$ تبدیل شود.

$$\tau = \frac{2t}{t_f - t_0} - \frac{t_f + t_0}{t_f - t_0} \tag{۱۷}$$

با استفاده از این تبدیل، فرم کلی مسئله کنترل بهینه که در معادلات (۸) تا (۱۱) بیان شده است، به فرم معادلات (۱۸) تا (۲۱) تبدیل می‌شود:

$$J = \phi\big(x(-1), t_0, x(1), t_f\big) + \frac{t_f - t_0}{2}\int_{-1}^{1} g\big(x(\tau), u(\tau), \tau; t_0, t_f\big) d\tau \tag{۱۸}$$

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{t_f - t_0}{2} f\big(x(\tau), u(\tau), \tau; t_0, t_f\big) \tag{۱۹}$$

$$\phi\big(x(-1), t_0, x(1), t_f\big) = 0 \tag{۲۰}$$

$$C\big(x(\tau), u(\tau), \tau; t_0, t_f\big) \le 0 \tag{۲۱}$$

در روش شبه‌طیفی گاوس، مسیرهای حالت با استفاده از برازش چندجمله‌ای‌های لاگرانژ بر مجموعه نقاط تطبیق $-1 < \tau_1 < \cdots < \tau_N < 1$ و نقطه ابتدایی $\tau_0 = -1$، به‌صورت معادله (۲۲) تقریب زده می‌شوند [۴۹]:

$$x(\tau) \approx X(\tau) = \sum_{i=0}^{N} X(\tau_i) L_i(\tau) \tag{۲۲}$$

که در آن $L_i(\tau)$، چندجمله‌ای‌های لاگرانژ هستند و به‌صورت زیر تعریف می‌شوند [۴۹]:

$$L_i(\tau) = \prod_{j=0, j\ne i}^{N} \frac{\tau - \tau_j}{\tau_i - \tau_j}, \qquad i = 0, \dots, N \tag{۲۳}$$

همچنین، با درنظر گرفتن نقاط تطبیق $\tau_k, k = 1, \dots, N$، مسیرهای ورودی کنترلی با استفاده از برازش چندجمله‌ای‌های لاگرانژ $L_i^*(\tau)$ به‌صورت معادله (۲۴) تقریب زده می‌شوند [۴۹]:

$$u(\tau) = U(\tau) = \sum_{i=1}^{N} U(\tau_i) L_i^*(\tau) \tag{۲۴}$$

که در آن $L_i^*(\tau)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۴۹]:

$$L_i^*(\tau) = \prod_{j=1, j\ne i}^{N} \frac{\tau - \tau_j}{\tau_i - \tau_j} \tag{۲۵}$$

می‌توان نشان داد که چندجمله‌ای‌های لاگرانژ در معادلات (۲۳) و (۲۵)، خاصیت انزوا[3] را به‌صورت معادله (۲۶) برآورده می‌کنند [۴۹]:

1 Legendre polynomial
2 Legendre-Gauss(LG)
3 Isolation property

$$L_i(\tau_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$
$$L_i^*(\tau_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \qquad (۲۶)$$

با مشتق‌گیری از معادله (۲۲)، مشتق $x(\tau)$ در نقاط تطبیق τ_k، به‌صورت معادله (۲۷) است [۳۶]:

$$\dot{x}(\tau_k) \approx \dot{X}(\tau_k) = \sum_{i=0}^{N} x(\tau_i)\dot{L}_i(\tau_k), \quad k = 1, \dots, N \qquad (۲۷)$$

مشتق چندجمله‌ای‌های لاگرانژ در نقاط تطبیق $\dot{L}_i(\tau_k)$، را می‌توان به فرم ماتریس مشتق‌گیری $D \in \mathbb{R}^{N\times N+1}$ بیان کرد. درایه‌های این ماتریس مشتق‌گیری با استفاده از معادله (۲۴) محاسبه می‌شوند [۳۶]:

$$D_{ki} = \dot{L}_i(\tau_k) = \sum_{l=0}^{N} \frac{\prod_{j=0, j\neq i,l}^{N}(\tau_k - \tau_j)}{\prod_{j=0, j\neq i}^{N}(\tau_i - \tau_j)} \qquad (۲۸)$$

که در آن $i = 0, \dots, N$ و $k = 1, \dots, N$ است. با استفاده از ماتریس مشتق‌گیری D، قیود دینامیکی بیان شده در معادله (۱۹) به یک مجموعه قیود جبری به‌صورت معادله (۲۹) تبدیل می‌شوند [۳۶]:

$$\sum_{i=0}^{N} D_{ki}X_i - \frac{t_f - t_0}{2} f(X_k, U_k, \tau_k; t_0, t_f) = 0, \quad k = 1, \dots, N \qquad (۲۹)$$

که در آن $X_k \equiv X(\tau_k) \in \mathbb{R}^n$ و $U_k \equiv U(\tau_k) \in \mathbb{R}^m$ که $k = 1, \dots, N$ است، به ترتیب بیانگر بردارهای حالت و ورودی کنترلی هستند. در روش شبه‌طیفی گاوس، تحقق قیود دینامیکی تنها در نقاط تطبیق مورد بررسی قرار می‌گیرد. بنابراین، مقدار متغیرهای حالت در زمان انتهایی X_f یا X_{N+1}، با استفاده از کوادراتور گاوس[1] به‌صورت معادله (۳۰) مقید می‌شود [۵۰]:

$$X_f = X_0 + \frac{t_f - t_0}{2}\sum_{k=1}^{N} w_k f(X_k, U_k, \tau_k; t_0, t_f) \qquad (۳۰)$$

که در آن w_k، وزن‌های گاوسی هستند. همچنین تابع هزینه زمان- پیوسته در معادله (۱۸)، با استفاده از کوادراتور گاوس به‌صورت معادله (۳۱) تقریب زده می‌شود [۳۶]:

$$J = \phi(X_0, t_0, X_f, t_f) + \frac{t_f - t_0}{2}\sum_{k=1}^{N} w_k g(X_k, U_k, \tau_k; t_0, t_f) \qquad (۳۱)$$

در نهایت فرم گسسته شرایط مرزی و قیود مسیر که به ترتیب در معادلات (۲۰) و (۲۱) بیان شده‌اند، به‌صورت معادلات (۳۲) و (۳۳) است:

$$\phi(X_0, t_0, X_f, t_f) = 0 \qquad (۳۲)$$

$$C(X_k, U_k, \tau_k; t_0, t_f) \leq 0, \quad (k = 1, \dots, N) \qquad (۳۳)$$

تابع هزینه بیان شده در معادله (۳۱) به همراه قیود جبری در معادلات (۲۹)، (۳۰)، (۳۲) و (۳۳)، یک مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی را تشکیل می‌دهند. با حل این مسئله، یک حل تقریبی برای مسئله کنترل بهینه زمان-پیوسته که در معادلات (۸) تا (۱۱) توصیف شده است، به‌دست می‌آید.

در بعضی مسائل کنترل بهینه، در مسیرهای حالت و ورودی کنترلی ناپیوستگی‌هایی وجود دارد. یک ایده مناسب برای افزایش دقت حل به‌دست آمده در این مسائل، تقسیم بازه زمانی حل مسئله کنترل بهینه به چند زیربازه است. در این حالت برآورده‌سازی قیود دینامیکی جبری (معادله ۲۹)، در نقاط تطبیق درون هر زیربازه مورد بررسی قرار می‌گیرد. سپس، به‌منظور برقراری پیوستگی مسیرهای حالت، شرایط مرزی در فصل

1 Gauss quadrature

مشترک زیربازه‌ها مقید می‌شود [۳۵، ۳۷]. بنابراین، شرایط مرزی بیان شده در معادله (۳۲) با معادله (۳۴) جایگزین می‌شود:

$$\begin{gathered}\mathcal{L}^{(1)}\left(X_0^{(1)}, t_0^{(1)}\right)=0 \\ \mathcal{L}_{(r)}^{(r+1)}\left(X_f^{(r)}, t_f^{(r)}, X_0^{(r+1)}, t_0^{(r+1)}\right)=0 \\ \mathcal{L}^{(P)}\left(X_f^{(P)}, t_f^{(P)}\right)=0\end{gathered} \quad (۳۴)$$

که در آن P ، تعداد زیربازه‌ها و $r=1, \ldots, P-1$ است [۳۷].

۵- تخمین کمک‌حالت

مسئله کنترل بهینه زمان- پیوسته تبدیل یافته در معادلات (۱۸) تا (۲۱) را می‌توان با استفاده از حساب تغییرات و اصل کمینه پونتریاگین [۳۳] برای به‌دست آوردن شرایط بهینگی مرتبه اول، حل کرد. شرایط بهینگی مرتبه اول با محاسبه تغییرات مرتبه اول تابع همیلتونین[۱] H در معادله (۳۵) به‌دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} H\left(x, \lambda, \mu, u, \tau ; t_0, t_f\right) &= g\left(x, u, \tau ; t_0, t_f\right) \\ &+\lambda^T f\left(x, u, \tau ; t_0, t_f\right) \\ &-\mu^T C\left(x, u, \tau ; t_0, t_f\right)\end{aligned} \quad (۳۵)$$

که در آن $\lambda \in \mathbb{R}^n$ بردار کمک‌حالت و $\mu \in \mathbb{R}^c$ بردار ضرایب لاگرانژ مربوط به قیود مسیر است. شرایط بهینگی مرتبه اول در معادله (۳۶) بیان شده‌اند [۴۵]:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \frac{t_f-t_0}{2} f\left(x(\tau), u(\tau), \tau ; t_0, t_f\right) = \frac{t_f-t_0}{2} \frac{\partial H}{\partial \lambda} \\ \frac{d\lambda}{d\tau} &= \frac{t_f-t_0}{2}\left(-\frac{\partial g}{\partial x}-\lambda^T \frac{\partial f}{\partial x}+\mu^T \frac{\partial C}{\partial x}\right) = -\frac{t_f-t_0}{2} \frac{\partial H}{\partial x}\end{aligned} \quad (۳۶)$$

$$0=\frac{\partial g}{\partial u}+\lambda^T \frac{\partial f}{\partial u}-\mu^T \frac{\partial C}{\partial u}=\frac{\partial H}{\partial u}$$

$$\phi\left(x(\tau_0), t_0, x(\tau_f), t_f\right)=0$$

$$\lambda(\tau_0)=-\frac{\partial \Phi}{\partial x(\tau_0)}+\nu^T \frac{\partial \phi}{\partial x(\tau_0)}$$

$$\lambda(\tau_f)=\frac{\partial \Phi}{\partial x(\tau_f)}-\nu^T \frac{\partial \phi}{\partial x(\tau_f)}$$

$$H(t_0)=\frac{\partial \Phi}{\partial t_0}-\nu^T \frac{\partial \phi}{\partial t_0}$$

$$H(t_f)=-\frac{\partial \Phi}{\partial t_f}+\nu^T \frac{\partial \phi}{\partial t_f}$$

$$\mu_j(\tau)=0, \quad when\ C_j\left(x, u, \tau ; t_0, t_f\right)<0, \quad j=1, \ldots, c$$

$$\mu_j(\tau) \leq 0, \quad when\ C_j\left(x, u, \tau ; t_0, t_f\right)=0, \quad j=1, \ldots, c$$

که در آن $\nu \in \mathbb{R}^q$ ، بردار ضرایب لاگرانژ مربوط به شرایط مرزی است.

در روش شبه‌طیفی گاوس می‌توان از ضرایب KKT که از حل مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی به‌دست می‌آیند، برای تخمین کمک‌حالت (λ) و اثبات بهینگی مرتبه اول استفاده کرد. با استفاده از این ضرایب می‌توان برای یک مسئله کنترل بهینه زمان- پیوسته، مقدار متغیرهای کمک‌حالت را در نقاط تطبیق و نقاط مرزی تخمین زد. تخمین کمک حالت در روش شبه‌طیفی گاوس بر اساس قضیه زیر انجام می‌شود:

قضیه ۱ (قضیه نگاشت کمک‌حالت[۲]): با استفاده از ضرایب KKT می‌توان مقدار متغیرهای کمک‌حالت را در زمان ابتدایی، زمان انتهایی و نقاط تطبیق به‌صورت معادله (۳۷) تخمین زد:

$$\begin{aligned}&\Lambda_k=\frac{\widetilde{\Lambda}_k}{w_k}+\widetilde{\Lambda}_f \\ &\Lambda_0=\widetilde{\Lambda}_0, \quad \Lambda_f=\widetilde{\Lambda}_f\end{aligned} \quad (۳۷)$$

---

1 Hamiltonian

2 Costate mapping theorem

که در آن $\tilde{\Lambda}_k$، $\tilde{\Lambda}_0$ و $\tilde{\Lambda}_f$ به ترتیب ضرایب KKT مربوط به قیود دینامیکی در نقاط تطبیق، شرایط مرزی در زمان ابتدایی و شرایط مرزی در زمان انتهایی هستند. Λ_k، Λ_0 و Λ_f به ترتیب بردار کمک‌حالت تخمین زده شده در نقاط تطبیق، زمان ابتدایی و زمان انتهایی هستند [۳۶].

٦- شبیه‌سازی عددی

در این بخش مسئله‌کنترل بهینه توصیف شده در معادلات (۱۲) تا (۱۵) با استفاده از روش شبه‌طیفی گاوس حل شده است. با استفاده از این روش، مسئله کنترل بهینه زمان- پیوسته به مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی تبدیل شده و سپس با استفاده از روش برنامه‌ریزی درجه دوم متوالی[1] حل شده است. با توجه به اینکه در مسئله کنترل بهینه کمترین زمان، زمان انتهایی آزاد است، بنابراین، متغیرهای مسئله کنترل بهینه علاوه‌بر مقدار متغیرهای حالت و ورودی کنترلی در نقاط تطبیق، شامل زمان انتهایی مانور t_f، نیز می‌شوند. شبه کد حل مسئله کنترل بهینه با استفاده از روش شبه‌طیفی گاوس و همچنین تخمین مسیرهای کمک‌حالت با استفاده از ضرایب KKT در جدول ۱ بیان شده است.

جدول ۱. شبه کد حل مسئله کنترل بهینه با استفاده از روش شبه‌طیفی گاوس

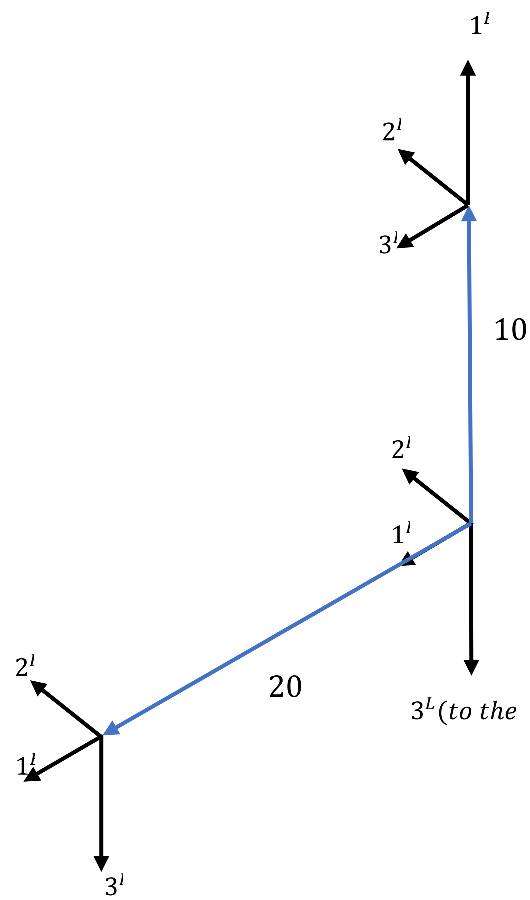
شماره مرحله	عملیات
۱	- تعیین شرایط اولیه و انتهایی بردار متغیرهای حالت (x_0 و x_f) - تعیین تعداد زیربازه‌ها و تعداد نقاط تطبیق در هر زیربازه (n_I و n) - تعیین کران بالا و پایین برای متغیرهای حالت و ورودی کنترلی در تمام نقاط تطبیق و t_f (B_u و B_l) - تعیین حدس اولیه برای متغیرهای حالت و ورودی کنترلی در تمام نقاط تطبیق و t_f (S_0)
۲	- تعیین تابع قیود مساوی غیرخطی برای محاسبه قیود دینامیکی جبری از معادله (۲۹) و قیود مرزی از معادلات (۳۰) و (۳۴) (نام تابع: NonlinConst_fun) - تعیین تابع محاسبه مقدار تابع هزینه از معادله (۳۱) (نام تابع: Cost_fun)
۳	- یافتن حل بهینه مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی با روش SQP $[S_{opt}, \tilde{\Lambda}]$ = SQP (Cost_fun, NonlinConst_fun, S_0, B_l, B_u)
۴	- تخمین مسیرهای کمک‌حالت با استفاده از ضرایب KKT، $\tilde{\Lambda}$ از معادله (۳۷)

سناریوی این شبیه‌سازی به‌صورت یک مانور مجاورت شش درجه آزادی بین دو فضاپیما که در یک مدار قرار گرفته‌اند، است. در زمان ابتدایی، فضاپیمای تعقیب کننده ۲۰ متر جلوتر از فضاپیمای هدف قرارگرفته و دستگاه بدنی تعقیب کننده منطبق بر دستگاه مرجع مداری هدف است. در زمان انتهایی مانور، فضاپیمای تعقیب کننده باید در موقعیت ۱۰ متری بالای فضاپیمای هدف قرار بگیرد و همچنین دستگاه بدنی تعقیب کننده باید یک دوران خالص حول محور 2^B داشته باشد. شماتیک این سناریو در شکل ۲ نشان داده شده است. پارامترهای فضاپیمای تعقیب کننده که بر اساس مشخصات فضاپیمای NASA X-ray Timing Explorer(XTE) انتخاب شده، در جدول ۲ بیان شده است [۵۱]. همچنین، مقدار متغیرهای حالت فضاپیمای تعقیب کننده در زمان ابتدایی و انتهایی مانور، در جدول ۳ بیان شده است. در این شبیه‌سازی، فرض شده است که محورهای بدنی فضاپیمای تعقیب کننده دارای عملگرهای تراستری مجزا برای تولید نیروها و گشتاورهای کنترلی هستند. همچنین با توجه به اینکه در این شبیه‌سازی هدف به‌دست آوردن مسیرهای حالت و ورودی کنترلی بهینه است، مدل عملگرهای تراستری به‌صورت ایده‌آل درنظر گرفته شده است. ملاحظات مربوط به اعمال ورودی

[1] Sequential quadratic programming (SQP)

کنترلی بهینه توسط عملگر (مانند تاخیر، ناهمواری سطح تراست و ...) باید در طراحی سیستم کنترل مورد بررسی قرار گیرد.

تعداد زیربازه‌ها در گسسته‌سازی مسئله کنترل بهینه با استفاده از روش شبه‌طیفی گاوس، ۲۰ و تعداد نقاط تطبیق در هر زیربازه، ۳ درنظر گرفته شده است. همچنین، فرض‌شده که بازه‌ی زمانی زیربازه‌ها یکسان است. نتایج شبیه‌سازی این سناریو در شکل‌های ۳ تا ۱۰ نشان داده شده است. تاریخچه زمانی نشان داده شده برای تغییرات زوایای اویلر در شکل ۷ با ترتیب دوران YXZ است.



شکل ۲. شماتیک سناریوی شبیه‌سازی مانور مجاورت مداری شش درجه آزادی

جدول ۲. مشخصات فضاپیمای تعقیب کننده

مشخصات فضاپیمای تعقیب‌کننده	**واحد**	**مقدار**
ممان‌های اینرسی	Kg.m²	$I_1 = 5621, I_2 = 4547, I_3 = 2364$
جرم	Kg	$m = 3200$
ماکزیمم گشتاورهای کنترلی قابل تولید	Nm	$T_{max} = [50,50,50]^T$
ماکزیمم نیروهای کنترلی قابل تولید	N	$F_{max} = [320,320,320]^T$
ارتفاع مداری	Km	$h_{orbit} = 580$

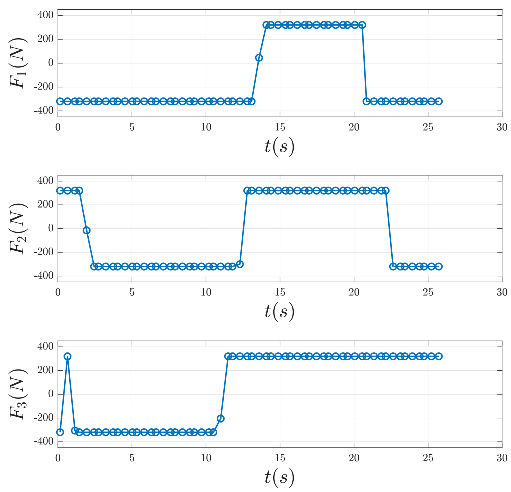
جدول ۳. مقدار متغیرهای حالت فضاپیمای تعقیب کننده در زمان ابتدایی و زمان انتهایی مانور

متغیرهای حالت فضاپیمای تعقیب کننده	**واحد**	**شرایط ابتدایی**	**شرایط انتهایی**
$[\omega^{BL}]^B$	rad/s	$[0,0,0]^T$	$[0,0,0]^T$
σ	واحد ندارد	$[0,0,0]^T$	$\left[0,\tan\left(\frac{90°}{2}\right),0\right]^T = [0,0.4142,0]^T$
$[v_B^L]^L$	m/s	$[0,0,0]^T$	$[0,0,0]^T$
$[s_{BL}]^L$	m	$[20,0,0]^T$	$[0,0,-10]^T$

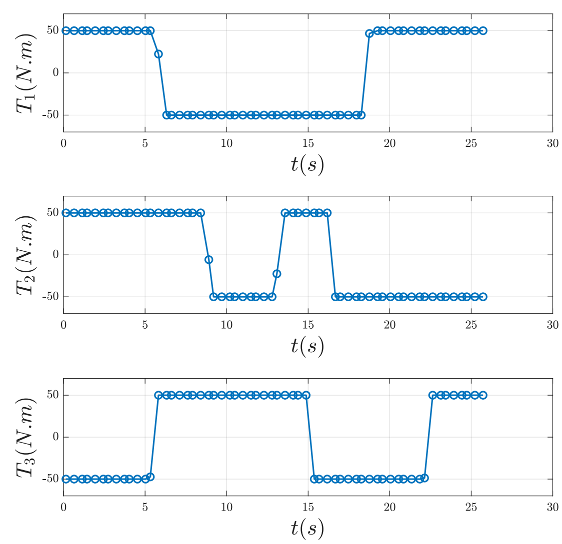
در پژوهش‌های گذشته [۵-۷, ۱۰] نشان داده شده است که ساختار کنترلی برای یک مانور وضعیت زمان بهینه، با درنظر گرفتن قید مکعبی بر روی مقدار گشتاورهای کنترلی، به‌صورت بنگ- بنگ است. به‌طور مشابه، نتایج شبیه‌سازی در شکل‌های ۳ و ۴ نشان می‌دهد که برای یک مانور شش درجه آزادی زمان بهینه، با درنظر گرفتن قید مکعبی بر روی مقدار نیروها و گشتاورهای کنترلی نیز، ساختار کنترلی به‌صورت بنگ- بنگ است. مدت زمان مانور شش درجه آزادی زمان بهینه در سناریوی مورد نظر $t_f = 25.8727\ sec$ است. بیلیموریا و وای [۵] برای

مانور وضعیت زمان بهینه یک فضاپیما با کنترل سه‌محوره‌ی مجزا نشان داده‌اند که اگرچه مانور وضعیت، یک چرخش خالص حول یک محور بدنی باشد، اما گشتاورهای کنترلی حول محورهای بدنی دیگر نیز برای دستیابی به زمان کمتر برای مانور وضعیت درگیر می‌شوند. نتایج سناریوی مورد نظر در شکل‌های ۳ و ۴ نشان می‌دهد که این موضوع را می‌توان برای یک مانور شش درجه آزادی زمان بهینه نیز تعمیم داد.

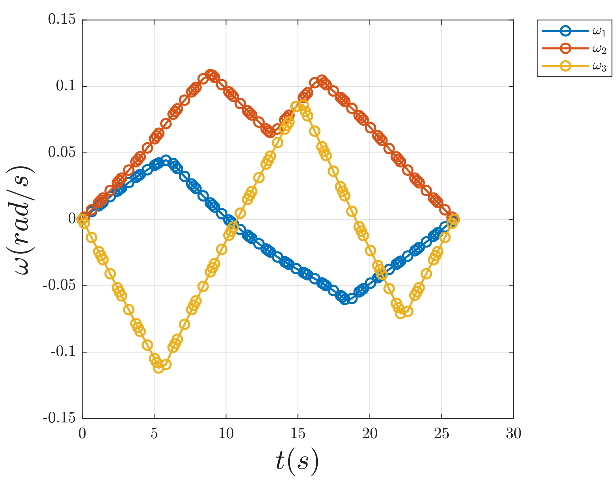
همان‌طور که در شکل‌های ۵ تا ۹ نشان داده شده است، بردارهای سرعت زاویه‌ای، وضعیت، سرعت نسبی و موقعیت فضاپیمای تعقیب کننده به شرایط انتهایی مطلوب در جدول ۳ می‌رسند. شماتیک سه‌بعدی مانور شش درجه آزادی زمان بهینه برای سناریوی مورد نظر در شکل ۱۰ نشان داده شده است.



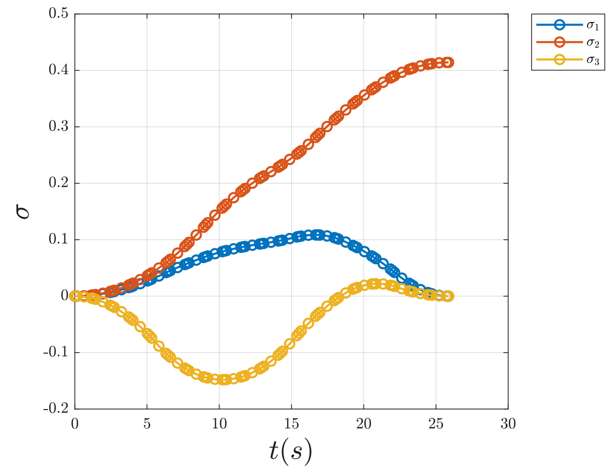
شکل ۴. تاریخچه زمانی نیروهای کنترلی



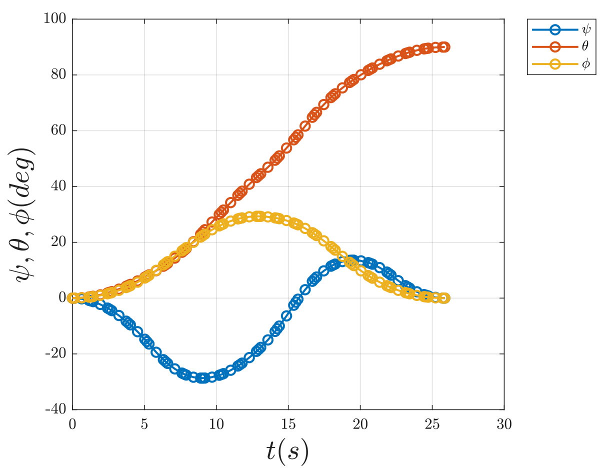
شکل ۳. تاریخچه زمانی گشتاورهای کنترلی



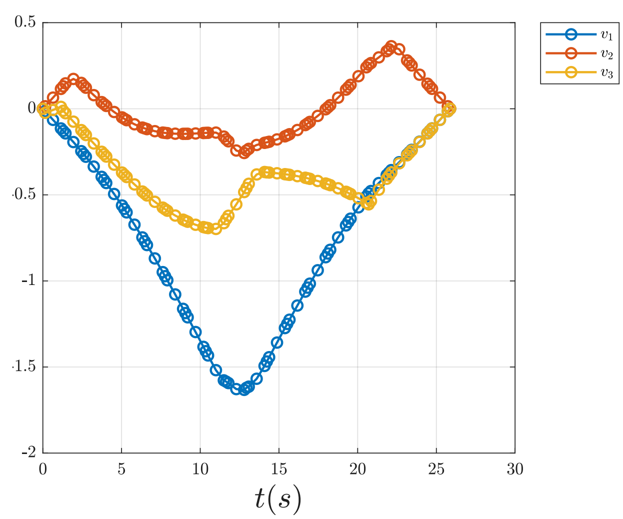
شکل ۵. تاریخچه زمانی مولفه‌های سرعت زاویه‌ای



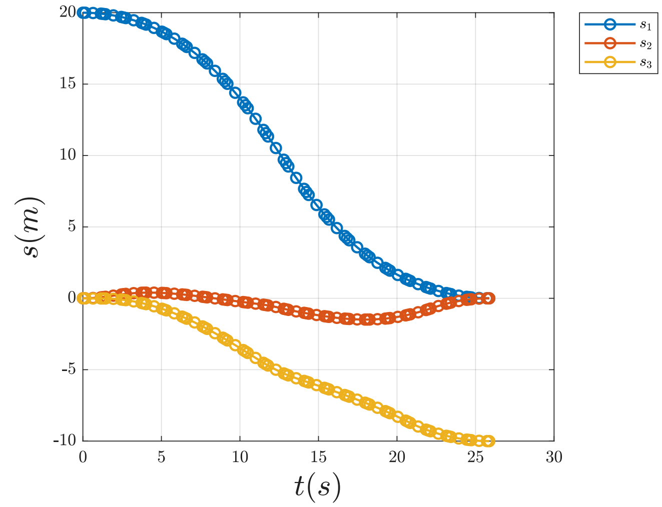
شکل ۶. تاریخچه زمانی پارامترهای رودریگز اصلاح‌یافته



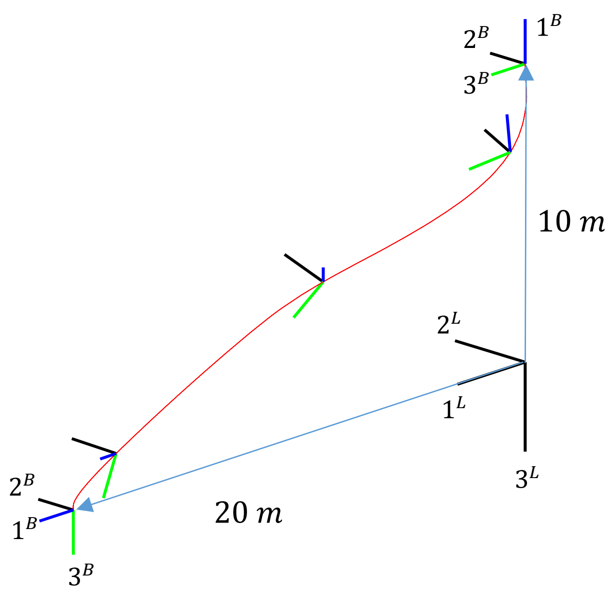
شکل ۷. تاریخچه زمانی زوایای اویلر



شکل ۸. تاریخچه زمانی مولفه‌های سرعت نسبی



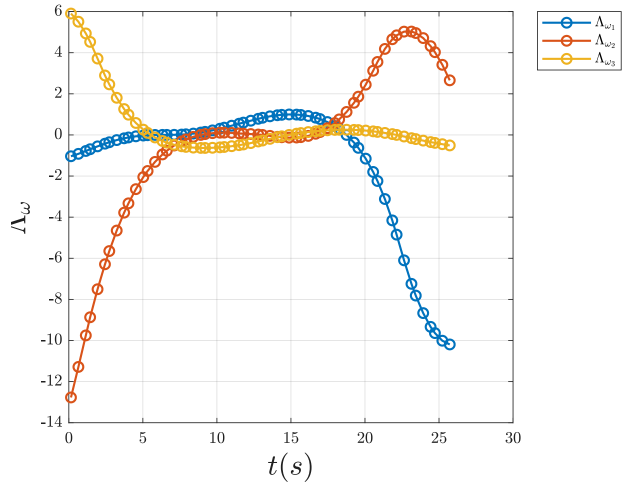
شکل ۹. تاریخچه زمانی موقعیت



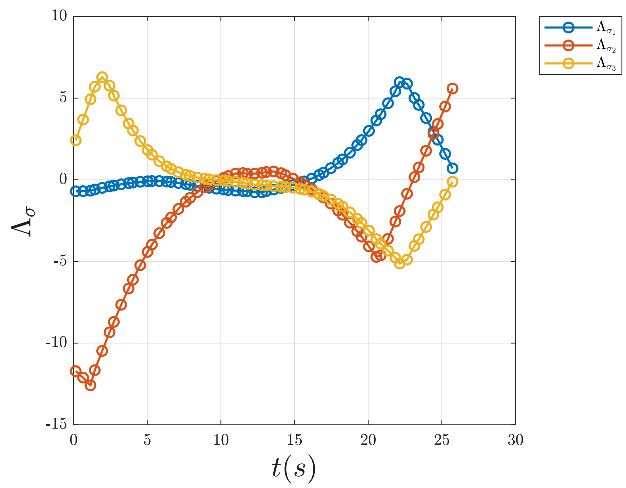
شکل ۱۰. شماتیک سه‌بعدی مانور شش درجه آزادی زمان بهینه

به‌منظور اثبات بهینگی مرتبه اول حل به‌دست آمده، از تخمین کمک‌حالت استفاده می‌شود. بر اساس قضیه ۱، با استفاده از ضرایب KKT که از حل مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی به‌دست می‌آیند، می‌توان متغیرهای کمک‌حالت را در نقاط تطبیق و نقاط

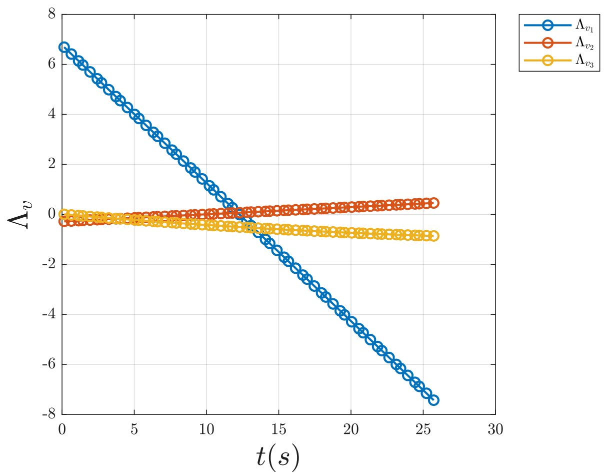
مرزی تخمین زد. نتایج تخمین کمک‌حالت در شکل‌های ۱۱ تا ۱۴ نشان داده شده است.



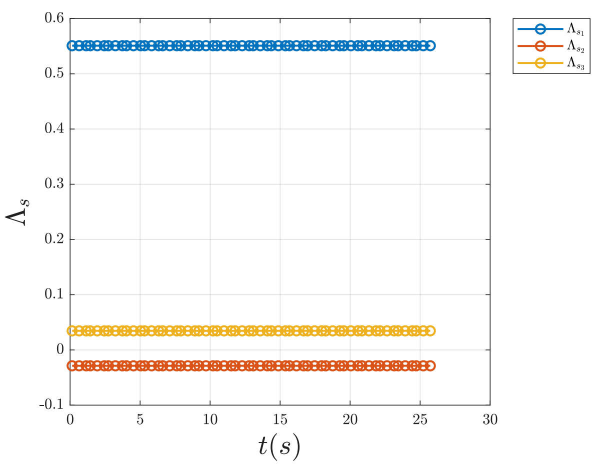
شکل ۱۱. تاریخچه زمانی کمک‌حالت‌های مربوط به سرعت زاویه‌ای



شکل ۱۲. تاریخچه زمانی کمک‌حالت‌های مربوط به پارامترهای رودریگز اصلاح‌یافته



شکل ۱۳. تاریخچه زمانی کمک‌حالت‌های مربوط به سرعت نسبی



شکل ۱۴. تاریخچه زمانی کمک‌حالت‌های مربوط به موقعیت

با درنظر گرفتن تابع هزینه به‌صورت معادله (۸)، برای مسئله کنترل بهینه کمترین زمان مورد نظر، تابع‌های $\phi(x(t_0), t_0, x(t_f), t_f)$ و $g(x(t), u(t), t)$ به‌صورت زیر هستند:

$$\begin{aligned} &\phi(x(t_0), t_0, x(t_f), t_f) = t_f \\ &g(x(t), u(t), t) = 0 \end{aligned} \qquad (۳۸)$$

همچنین در این شبیه‌سازی، شرایط مرزی مشخص هستند و تابعی از t_f نیستند $\phi(x(t_0), t_0, x(t_f), t_f)$ (مطابق جدول ۳). بنابراین، بر اساس شرایط بهینگی مرتبه اول در معادله (۳۶) خواهیم داشت:

$$H(t_f) = -1$$

از طرفی تابع همیلتونین در معادله (۳۵) برای مسئله کنترل بهینه مورد نظر به‌صورت معادله (۳۹) است:

$$H(x, \lambda, \mu, u, \tau; t_0, t_f) = \lambda^T f(x, u, \tau; t_0, t_f) \quad (۳۹)$$

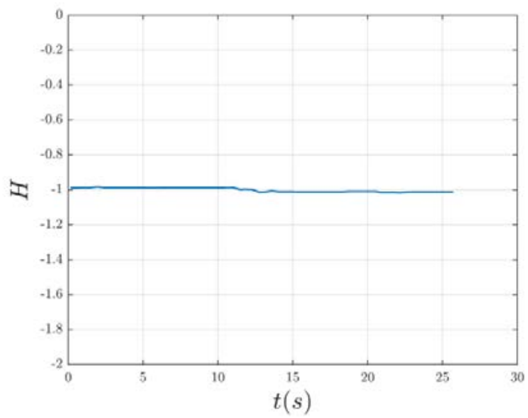
با توجه به قیود دینامیکی در معادله (۱۳)، تابع همیلتونین در معادله (۳۹) تابعی از زمان نیست. در نتیجه:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

بنابراین، تابع همیلتونین باید در طول بازه زمانی مانور زمان بهینه ثابت و برابر با ۱- باشد.

$$H(t) = -1$$

نمودار زمانی تابع همیلتونین در شکل ۱۵ نشان می‌دهد که در طول بازه زمانی مانور، تابع همیلتونین محاسبه شده تقریبا ثابت و مقدار تقریبی آن برابر با ۱- است. بنابراین حل به‌دست آمده شرایط بهینگی مرتبه اول را برآورده می‌کند.



شکل ۱۵. تاریخچه زمانی همیلتونین

در این قسمت برای سناریوهای مختلف، نتایج به‌دست آمده از حل مسئله کنترل بهینه با استفاده از روش شبه‌طیفی گاوس با نتایج نرم افزار GPOPS [۵۲] مقایسه شده است. بدین منظور، مسئله مانور شش درجه آزادی زمان بهینه با در نظر گرفتن موقعیت‌های اولیه مختلف فضاپیمای تعقیب کننده نسبت به دستگاه مرجع مداری هدف حل شده است. مدت زمان مانور شش درجه آزادی زمان بهینه برای سناریوهای مختلف در جدول ۴ بیان شده است.

جدول ۴. نتایج تطبیقی روش شبه‌طیفی گاوس و نرم افزار GPOPS برای سناریوهای مختلف

موقعیت اولیه(m)	t_f روش شبه‌طیفی گاوس (sec)	t_f نرم افزار GPOPS (sec)	درصد تغییرات(٪)
$[20,0,0]^T$ سناریوی اصلی	25.8727	25.87	0.0104
$[20,4,0]^T$	26.1674	26.0336	0.5113
$[20,4,4]^T$	25.9360	26.1652	0.8837

0.9271	25.8986	25.6607	$[20,4,-5]^T$
1.5325	28.2784	28.7185	$[25,-5,-5]$

با توجه به نتایج ارائه شده در جدول ۴، نتایج به‌دست آمده از حل مسئله کنترل بهینه با استفاده از روش شبه‌طیفی گاوس، مطابقت مناسبی با نتایج حل مسئله کنترل بهینه با استفاده از نرم افزار GPOPS دارد و حتی در مواردی مدت زمان مانور زمان بهینه کمتر نیز است.

۷- نتیجه‌گیری

در این پژوهش مسئله مانور شش درجه آزادی زمان بهینه برای یک فضاپیما با عملگرهای مجزا برای کنترل وضعیت و موقعیت مورد بررسی قرار گرفت. به‌عنوان یک نمونه از مانور شش درجه آزادی، مسئله کنترل بهینه کمترین زمان برای مانور مجاورت بین دو فضاپیما فرمول‌بندی شده و با استفاده از روش شبه‌طیفی گاوس حل شد. سپس، با استفاده از ضرایب KKT، تخمین کمک‌حالت انجام شد.

نتایج شبیه‌سازی نشان داد که برای مسئله مانور شش درجه آزادی زمان بهینه مورد نظر، ساختار کنترلی به‌صورت بنگ- بنگ است. به‌منظور صحت‌سنجی حل به‌دست آمده، با استفاده از تخمین کمک‌حالت نشان داده شد که نتایج به‌دست آمده شرایط بهینگی مرتبه اول را برآورده می‌کند. در نهایت برای سناریوهای مختلف، مدت زمان مانور شش درجه آزادی زمان بهینه به‌دست آمده از حل مسئله کنترل بهینه با استفاده از روش شبه‌طیفی گاوس، با نتایج به‌دست آمده از حل مسئله کنترل بهینه با استفاده از نرم افزار GPOPS مقایسه شد. نتایج این مقایسه نشان دادکه حل به‌دست آمده با استفاده از روش شبه‌طیفی گاوس مطابقت خوبی با نتایج نرم‌افزار GPOPS دارد.

تعارض منافع

هیچ‌گونه تعارض منافع توسط نویسندگان بیان نشده است.

تشکر و قدردانی

اد

مراجع

[1] W. Zhang et al., "WTS: A Weakly towards strongly supervised learning framework for remote sensing land cover classification using segmentation models". *Remote Sensing*, 2021. 13(3): p. 394.

[2] A. Orynbaikyzy, U. Gessner & C. Conrad, "Crop type classification using a combination of optical and radar remote sensing data: a review". *international journal of remote sensing*, 2019. 40(17): p. 6553-6595.

[3] J. Jung et al., "The potential of remote sensing and artificial intelligence as tools to improve the resilience of agriculture production systems". *Current Opinion in Biotechnology*, 2021. 70: p. 15-22.

[4] Q. Xie et al., "Crop height estimation of corn from multi-year RADARSAT-2 polarimetric observables using machine learning". *Remote Sensing*, 2021. 13(3): p. 392.

[5] G.A. Carter, "Responses of leaf spectral reflectance to plant stress". *American Journal of Botany*, 1993. 80(3): p. 239-243.

[6] J. Peñuelas et al., "Reflectance indices associated with physiological changes in nitrogen-and water-limited sunflower leaves". *Remote sensing of Environment*, 1994. 48(2): p. 135-146.

[7] H.C. Stimson et al., "Spectral sensing of foliar water conditions in two co-occurring conifer species: Pinus edulis and Juniperus monosperma". *Remote Sensing of Environment*, 2005. 96(1): p. 108-118.

[8] C. Xu et al., "Monitoring crop water content for corn and soybean fields through data fusion of MODIS and Landsat measurements in Iowa". *Agricultural Water Management*, 2020. 227: p. 105844.

[9] J. Penuelas, I. Filella, C. Biel, L. Serrano & R. Save, "The reflectance at the 950-970 nm region as an indicator of plant water status". *International Journal of Remote Sensing*, 1993. 14: p. 1887-1905.

[10] S.L. Ustin et al., "Estimating canopy water content of chaparral shrubs using optical methods". *Remote Sensing of Environment*, 1998. 65(3): p. 280-291.

[11] J. Carlson, and R. Burgan, "Review of users' needs in operational fire danger estimation: the Oklahoma

example". *International Journal of remote sensing*, 2003. 24(8): p. 1601-1620.
[12] E. Chuvieco et al., Improving burning efficiency estimates through satellite assessment of fuel moisture content. Journal of Geophysical Research: Atmospheres, 2004. 109(D14).
[13] W. Kong et al., "Estimating Vertical Distribution of Leaf Water Content within Wheat Canopies after Head Emergence". *Remote Sensing*, 2021. 13(20): p. 4125.
[14] A.F. Goetz et al., "Imaging spectrometry for earth remote sensing". *science*, 1985. 228(4704): p. 1147-1153.
[15] P.J. Curran, J.A. Kupiec and G.M. Smith, "Remote sensing the biochemical composition of a slash pine canopy. Geoscience and Remote Sensing", *IEEE Transactions on*, 1997. 35(2): p. 415-420.
[16] R. Colombo et al., "Estimation of leaf and canopy water content in poplar plantations by means of hyperspectral indices and inverse modeling". *Remote Sensing of Environment*, 2008. 112(4): p. 1820-1834.
[17] M. Hardisky, V. Klemas and M. Smart, "The influence of soil salinity, growth form, and leaf moisture on the spectral radiance of". *Spartina alterniflora*, 1983. 49: p. 77-83.
[18] B. C. Gao, "Normalized difference water index for remote sensing of vegetation liquid water from space". *in Imaging Spectrometry*. 1995. International Society for Optics and Photonics.
[19] G. Krishna et al., "Application of thermal imaging and hyperspectral remote sensing for crop water deficit stress monitoring". *Geocarto International*, 2021. 36(5): p. 481-498.
[20] R. Filgueiras et al., "Soil water content and actual evapotranspiration predictions using regression algorithms and remote sensing data". *Agricultural Water Management*, 2020. 241: p. 106346.
[21] L. Zhang et al., "Monitoring cotton (Gossypium hirsutum L.) leaf ion content and leaf water content in saline soil with hyperspectral reflectance". *European Journal of Remote Sensing*, 2014. 47: p. 593-610.
[22] E.B. Knipling, "Physical and physiological basis for the reflectance of visible and near-infrared radiation from vegetation". *Remote sensing of environment*, 1970. 1(3): p. 155-159.
[23] C.J. Tucker, "Remote sensing of leaf water content in the near infrared". *Remote sensing of Environment*, 1980. 10(1): p. 23-32.
[24] P. Ceccato et al., "Detecting vegetation leaf water content using reflectance in the optical domain". *Remote sensing of environment*, 2001. 77(1): p. 22-33.
[25] P.J. Zarco-Tejada and S. Ustin. "Modeling canopy water content for carbon estimates from MODIS data at land EOS validation sites". *in IGARSS 2001*. Scanning the Present and Resolving the Future. Proceedings. IEEE 2001 International Geoscience and Remote Sensing Symposium (Cat. No. 01CH37217). 2001. IEEE.
[26] M.R. Mobasheri, and S.B. Fatemi, "Leaf Equivalent Water Thickness assessment using reflectance at optimum wavelengths". *Theoretical and Experimental Plant Physiology*, 2013. 25(3): p. 196-202.
[27] R. Pu et al., "Spectral absorption features as indicators of water status in coast live oak (Quercus agrifolia) leaves". *International Journal of Remote Sensing*, 2003. 24(9): p. 1799-1810.
[28] P. Bowyer and F. Danson, "Sensitivity of spectral reflectance to variation in live fuel moisture content at leaf and canopy level". *Remote Sensing of Environment*, 2004. 92(3): p. 297-308.
[29] E.R. Hunt et al., "Remote sensing leaf chlorophyll content using a visible band index". 2011.
[30] D.M. Kim et al., "Highly sensitive image-derived indices of water-stressed plants using hyperspectral imaging in SWIR and histogram analysis". *Scientific reports*, 2015. 5(1): p. 1-11.
[31] F. Rasheed, S. Delagrange, and F. Lorenzetti, "Detection of plant water stress using leaf spectral responses in three poplar hybrids prior to the onset of physiological effects". *International Journal of Remote Sensing*, 2020. 41(14): p. 5127-5146.