



Journal of
Space Science, Technology
& Applications (Persian)

Vol. 1, No. 2, pp.: 147-166
2022

Available in:
Journal.isrc.ac.ir/article_146952.html

DOI:

10.22034/jssta.2022.315191.1038

Article Info

Received: 2021-11-16
Accepted: 2022-2-18

Keywords

Time-optimal control,
Attitude and position
dynamics, Orbital
rendezvous maneuver,
Pseudospectral method,
Bang-Bang control
structure

How to cite this article

Sayyed Majid Esmailifar,
Sayyed Mohammad
Mousavi , “Time-optimal
Control of Spacecraft
Rotational and
Translational Dynamics in
Orbital Rendezvous
Maneuver”, *Journal of
Space Science, Technology
and Applications*, vol 1 (2),
p.: 166-147, 2022.

Time-optimal Control of Spacecraft Rotational and Translational Dynamics in Orbital Rendezvous Maneuver

Sayyed Majid Esmailifar¹, Sayyed Mohammad Mousavi^{*2},
Mohammad Chiniforoushan³

1. Student, Department of Aerospace Engineering, Amirkabir University of Technology, msv.mohammad101@aut.ac.ir
- 2,*. Faculty member at Amirkabir University of technology, esmailifar@aut.ac.ir, Corresponding author
3. Researcher, Iranian Space Research Center, m.c.foroushan@aut.ac.ir

Abstract

In this research, the time-optimal 6 degrees of freedom (6DOF) orbital rendezvous maneuver problem for an inertially asymmetric rigid spacecraft with independent attitude and position control actuators has been investigated. It is also assumed that the spacecraft is equipped with the thruster actuators and the control forces and torques are generated along the three principal axes of the spacecraft. In order to obtain the time-optimal 6DOF maneuver state and control trajectories, at first, the relative translational and rotational dynamics of the spacecraft are described. Then, the Gauss pseudospectral method is used to solve the time-optimal control problem in the presence of constraints on control forces and torques. Also, the costates are estimated to first-order optimality proof of the obtained solutions. The Numerical simulation results show that for the assumed time-optimal 6DOF maneuver problem, the control structure for all of the control forces and torques is ‘bang-bang’. Eventually, the optimality of the obtained solutions is verified by checking the fulfillment of Pontryagin’s minimum principle.



کنترل زمان بهینه وضعیت و موقعیت یک فضاپیما در مانور مجاورت مداری

سید محمد موسوی^۱، سید مجید اسماعیلی فر^{۲*}، محمد چینی فروشان^۳

۱. دانشجوی دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، msv.mohammad101@aut.ac.ir

۲.*. هیات علمی دانشگاه صنعتی امیرکبیر، esmailifar@aut.ac.ir (نویسنده مسئول)

۳. پژوهشگر پژوهشگاه فضایی ایران، m.c.foroushan@aut.ac.ir

دو فصلنامه

علوم، فناوری و
کاربردهای فضایی

سال اول، شماره ۲، صفحه ۱۶۶-۱۴۷
پاییز و زمستان ۱۴۰۰

دسترسی پذیر در نشانی:

Journal.isrc.ac.ir/article_146952.html

DOI:

10.22034/jस्ता.2022.315191.1038

تاریخچه داوری

دریافت: ۱۴۰۰/۰۸/۲۵

پذیرش: ۱۴۰۰/۱۱/۲۹

واژه‌های کلیدی

کنترل بهینه کمترین زمان، مانور مجاورت مداری، دینامیک انتقالی و دورانی، روش شبه طیفی گاوس، ساختار کنترلی بنگ-بنگ

نحوه استناد به این مقاله

سید محمد موسوی، سید مجید

اسماعیلی فر "کنترل زمان بهینه

وضعیت و موقعیت یک فضاپیما در

مانور مجاورت مداری"، دو فصلنامه

علوم، فناوری و کاربردهای فضایی،

جلد اول، شماره دوم، صفحات ۱۴۷-۱۶۶

۱۶۶، ۱۴۰۰.

چکیده

در این پژوهش مسئله مانور مجاورت مداری شش درجه آزادی زمان بهینه برای یک فضاپیما صلب، نامتقارن^۱ و با عملگرهای کنترلی مجزا برای کنترل وضعیت^۲ و موقعیت^۳ مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین فرض شده است که فضاپیما به عملگرهای تراستری مجهز است و نیروها و گشتاورهای کنترلی در جهت و حول سه محور ممان اینرسی اصلی فضاپیما ایجاد می‌شوند. برای به دست آوردن مسیرهای حالت و ورودی کنترلی مانور شش درجه آزادی زمان بهینه، در ابتدا دینامیک‌های انتقالی و دورانی نسبی فضاپیما توصیف شده‌اند. سپس، برای حل مسئله کنترل بهینه کمترین زمان با در نظر گرفتن قیود بر روی نیروها و گشتاورهای کنترلی، از روش شبه طیفی گاوس^۴ استفاده شده است. همچنین، به منظور اثبات بهینگی مرتبه اول حل به دست آمده، تخمین کمک حالت انجام شده است. نتایج شبیه‌سازی عددی نشان می‌دهد که برای مسئله مانور شش درجه آزادی، زمان بهینه مورد نظر، ساختار کنترلی برای تمام نیروها و گشتاورهای کنترلی بنگ-بنگ^۵ است. در نهایت نیز با استفاده از اصل کمینه پونتریاگین^۶، بهینگی مرتبه اول حل به دست آمده اثبات شده است.

1 Asymmetric

2 Attitude

3 Position

4 Gauss pseudospectral method

5 Bang-Bang

6 Pontryagin's minimum principle

		علائم و اختصارات	
L	چندجمله‌ای لاگرانژ (برازش بر نقاط تطبیق و نقطه‌ی ابتدایی)	I_B	ماتریس اینرسی فضاپیمای تعقیب‌کننده
L^*	چندجمله‌ای لاگرانژ (برازش بر نقاط تطبیق)	D^α	عملگر مشتق زمانی دورانی نسبت به دستگاه دلخواه α
$U(\tau)$	مسیر ورودی کنترلی تقریب‌زده شده با چندجمله‌ای‌های لاگرانژ	ω^{BL}	بردار سرعت زاویه‌ای دستگاه بدنی تعقیب‌کننده نسبت به دستگاه مرجع مداری هدف با مولفه‌های $\omega_i, i = 1, 2, 3$
D	ماتریس مشتق‌گیری	ω^{LI}	بردار سرعت زاویه‌ای دستگاه مرجع مداری هدف نسبت به دستگاه اینرسی زمین-مرکز
w	وزن‌های گاوسی برای نقاط تطبیق	ω^{BI}	بردار سرعت زاویه‌ای دستگاه بدنی تعقیب‌کننده نسبت به دستگاه اینرسی زمین-مرکز
\mathcal{L}	قیود مرزی در مسئله‌ی با چند زیربازه	T	بردار گشتاورهای کنترلی وارد بر فضاپیمای تعقیب‌کننده با مولفه‌های $T_i, i = 1, 2, 3$
H	تابع همیلتونین	σ	بردار پارامترهای رودریگز اصلاح‌یافته با مولفه‌های $\sigma_i, i = 1, 2, 3$
λ	بردار کمک‌حالت	e_i	مولفه‌های بردار اصلی اوپلر به ازای $i = 1, 2, 3$
μ	بردار ضرائب لاگرانژ مربوط به قیود مسیر	Φ	زاویه دوران حول محور اصلی اوپلر
ν	بردار ضرائب لاگرانژ مربوط به شرایط مرزی	v_B^L	بردار سرعت مرکز جرم فضاپیمای تعقیب‌کننده نسبت به دستگاه مرجع مداری هدف
$\tilde{\Lambda}$	ضرائب KKT	S_{BL}	بردار موقعیت مرکز جرم فضاپیمای تعقیب‌کننده نسبت به دستگاه مرجع مداری هدف
Λ	بردار کمک‌حالت تخمین‌زده شده	m	جرم فضاپیمای تعقیب‌کننده
n	تعداد نقاط تطبیق در هر زیربازه	ω_n	سرعت زاویه‌ای مداری
n_l	تعداد زیربازه‌ها	F	بردار نیروهای کنترلی وارد بر فضاپیمای تعقیب‌کننده با مولفه‌های $F_i, i = 1, 2, 3$
B_l	کران پایین متغیرهای حالت و ورودی کنترلی در تمام نقاط تطبیق و t_f	F	ماتریس انتقال از دستگاه بدنی تعقیب‌کننده به دستگاه مرجع مداری هدف
B_u	کران بالای متغیرهای حالت و ورودی کنترلی در تمام نقاط تطبیق و t_f	T_{LB}	ماتریس انتقال از دستگاه بدنی تعقیب‌کننده به دستگاه مرجع مداری هدف
S_0	حدس اولیه متغیرهای حالت و ورودی کنترلی در تمام نقاط تطبیق و t_f	J	تابع هزینه
S_{opt}	حل بهینه بدست‌آمده از حل مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی	$x(t)$	بردار حالت
	بالانویس‌ها	$u(t)$	بردار ورودی کنترلی
B	دستگاه بدنی تعقیب‌کننده	t	زمان
L	دستگاه مرجع مداری هدف	ϕ	جمله‌ی مربوط به قیود مرزی در تابع هزینه
	پایین نویس‌ها	g	جمله‌ی زیر انتگرال در تابع هزینه
0	مربوط به زمان ابتدایی	f	بردار توابع حالت
f	مربوط به زمان انتهایی	ϕ	قیود مرزی
		C	قیود مساوی و نامساوی مسیر
		τ	متغیر زمان در روش شبه طیفی گاوس
		$X(\tau)$	مسیر حالت تقریب‌زده شده با چندجمله‌ای‌های لاگرانژ
		N	تعداد نقاط تطبیق

(نرم دوم بردار ورودی کنترلی از یک مقدار مشخص کمتر باشد)، مانور چرخش حول محور اصلی اویلر زمان بهینه است. شن^۱ و چیوترس^۹ [۷]، مانور وضعیت زمان بهینه برای یک فضایی متقارن محوری^{۱۰} و تحریک ناقص^{۱۱} را بررسی کرده‌اند.

در تعدادی از پژوهش‌ها، مسئله مانور وضعیت زمان بهینه برای یک فضایی نامتقارن با در نظر گرفتن مفروضات مختلف حل شده است. هو^{۱۲} و همکاران [۸]، مانور وضعیت زمان بهینه را برای یک فضایی دارای اجزای منعطف و با در نظر گرفتن مانور وضعیت هموار^{۱۳} مورد مطالعه قرار داده‌اند. جین سونگ^{۱۴} و همکاران [۹]، مسئله مانور وضعیت زمان بهینه را برای یک فضایی با عملگرهای مغناطیسی حل کرده‌اند. آلیوریس^{۱۵} و استافتی^{۱۶} [۱۰]، مسئله مانور وضعیت زمان بهینه را برای یک فضایی تحریک ناقص، با عملگرهای چرخ عکس‌العملی و تراستر برای ایجاد گشتاور حول دو محور ممان اینرسی اصلی، بررسی کرده‌اند. در این مرجع مقدار گشتاورهای کنترلی عملگرها و ماکزیمم اندازه حرکت زاویه‌ای چرخ‌های عکس‌العملی مقید شده‌اند. همچنین آلیوریس و استافتی [۱۱]، مسئله مانور وضعیت زمان بهینه را برای یک مانور چندهدفه با در نظر گرفتن قیود بر روی مقدار گشتاورهای کنترلی، ماکزیمم اندازه حرکت زاویه‌ای چرخ‌های عکس‌العملی و همچنین ماکزیمم سرعت زاویه‌ای فضایی، مورد بررسی قرار داده‌اند. در بعضی از مراجع مسئله مانور وضعیت زمان بهینه، با فرض وجود قیود بر روی وضعیت فضایی حل شده است [۱۲-۱۵].

یافتن مانور زمان بهینه منجر به یک مسئله کنترل بهینه کمترین زمان می‌شود که غالباً برای حل آن از روش‌های حل عددی استفاده می‌شود. از نقطه نظر روش‌های حل مسئله کنترل

استفاده از مانور زمان بهینه در وسایل نقلیه هوافضایی یکی از موضوعات مورد علاقه در حوزه‌های مختلف مهندسی هوافضا است. به‌طور خاص در ماموریت‌های فضایی، مانور وضعیت زمان بهینه در کاربردهایی مانند مانور نشانه‌روی برای تنظیم جهت‌گیری آنتن فضایی‌های مخابراتی، مانور وضعیت ماهواره‌های تصویربرداری برای رهگیری چند هدف بر روی زمین یا مانور وضعیت تلسکوپ‌های فضایی برای مشاهده اجرام آسمانی استفاده می‌شود [۱]. علاوه بر مانور وضعیت زمان بهینه، مانور شش درجه آزادی شامل مانور هم‌زمان وضعیت و موقعیت نیز می‌تواند مورد توجه واقع شود. این مانور را می‌توان به عنوان یک مود عملیاتی در شرایط اضطراری، برای مانور مجاورت و اتصال یک فضایی با فضایی دیگر مانند ایستگاه فضایی بین‌المللی در نظر گرفت [۲-۴].

مانور وضعیت زمان بهینه در پژوهش‌های متعددی مورد مطالعه قرار گرفته است. بیلیموریا^۱ و وای^۲ [۵]، مسئله مانور وضعیت زمان بهینه برای یک فضایی متقارن^۳ و صلب، با فرض سه محور کنترلی متعامد و قید مکعبی^۴ بر روی گشتاورهای کنترلی (مقدار مولفه‌های بردار ورودی کنترلی از یک مقدار مشخص کمتر باشد)، را مورد بررسی قرار داده‌اند. نتایج ارائه شده در این مرجع نشان می‌دهد که مانور چرخش حول محور اصلی اویلر زمان بهینه نیست و ساختار ورودی کنترلی زمان بهینه در هر سه محور کنترلی به صورت بنگ-بنگ است. بای^۵ و جانکینز^۶ [۶]، نتایج جدیدی برای مانور وضعیت بررسی شده در مرجع [۵]، ارائه داده‌اند. در این مرجع، نشان داده شده است که ساختار ورودی کنترلی زمان بهینه برای یک مانور وضعیت مشخص، یکتا نیست. همچنین با فرض قید کروی^۷ بر روی گشتاورهای کنترلی

9 Tsiotras

10 Axisymmetric

11 Underactuated

12 Hu

13 Smooth attitude maneuver

14 Jinsong

15 Olivares

16 Staffetti

1 Bilimoria

2 Wie

3 Symmetric

4 Cubical constraint

5 Bai

6 Junkins

7 Spherical constraint

8 Shen

غیرخطی با استفاده از روش‌های بهینه‌سازی مانند روش‌های مبتنی بر شیب^{۱۵} و روش‌های تکاملی^{۱۶} حل می‌شود [۲۹]. یک دسته از روش‌های مستقیم، روش‌های تطبیقی سراسری^{۱۷} هستند [۲۹، ۳۰، ۳۴]. در این روش‌ها، مسیرهای حالت و ورودی کنترلی در نقاط تطبیق گسسته شده و با استفاده از چندجمله‌ای‌های سراسری تقریب زده می‌شوند. یک دسته از روش‌های تطبیقی سراسری که در سال‌های اخیر توسعه یافته‌اند، روش‌های شبه‌طیفی هستند. از جمله این روش‌ها می‌توان به روش شبه‌طیفی گاوس [۳۵-۳۹]، روش شبه‌طیفی لوباتو^{۱۸} [۴۰] و [۴۱] و روش شبه‌طیفی رادائو^{۱۹} [۴۲-۴۴] اشاره کرد. با استفاده از روش‌های شبه‌طیفی، قیود دینامیکی زمان-پیوسته، گسسته شده و به قیود جبری تبدیل می‌شوند. قیود دینامیکی، قیود مسیر و قیود مرزی به همراه تابع هزینه، مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی را تشکیل می‌دهند.

در روش شبه‌طیفی گاوس، شرایط بهینگی مرتبه اول برای حل مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی (شرایط KKT^{20}) معادل فرم گسسته شده شرایط بهینگی مرتبه اول زمان-پیوسته هستند [۳۶، ۳۵]. در این حالت مجموعه ضرائب KKT که از حل مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی به دست می‌آیند، متناظر با مقدار متغیرهای کمک حالت در نقاط تطبیق هستند. بنابراین، با حل مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی و به دست آوردن ضرائب KKT ، می‌توان از این ضرائب برای تخمین مسیرهای کمک حالت استفاده کرد. با استفاده از مسیرهای متغیر کمک حالت می‌توان بهینگی مرتبه اول حل به دست آمده را اثبات کرد.

در این پژوهش، مسئله مانور شش درجه آزادی زمان بهینه شامل مانور هم‌زمان وضعیت و موقعیت، مورد بررسی قرار گرفته

بهینه، روش‌هایی مانند روش پرتابی^۱ [۷-۵]، روش شبه‌طیفی^۲ [۸، ۱۳، ۱۶]، روش هموتوپ^۳ [۱۷، ۱۸]، ترکیب روش‌های شبه‌طیفی و هموتوپ^۴ [۱۹، ۲۰]، ترکیب روش‌های تکاملی مانند ازدحام ذرات^۴، تکامل تفاضلی^۵ و کاوش باکتری^۶ با روش شبه‌طیفی [۲۱]، ترکیب روش‌های دینامیک معکوس^۷ و روش ترمیم شیب متوالی^۸ [۲۲]، ترکیب روش‌های دینامیک معکوس و شبه‌طیفی [۱۵] و همچنین ترکیب روش‌های دینامیک معکوس و ازدحام ذرات [۱۲، ۲۳، ۲۴] برای یافتن مانور وضعیت زمان بهینه یک فضاپیما استفاده شده‌اند. اخیراً نیز روش‌هایی مانند برنامه‌ریزی محدب متوالی^۹ [۲۵] و بهینه‌سازی فاقد مشتق^{۱۰} [۲۶] نیز برای حل این مسئله به کار رفته‌اند. لازم به ذکر است که استفاده از بعضی از این روش‌ها برای حل مسئله کنترل بهینه، منجر به حل نزدیک بهینه می‌شود.

به طور کلی، روش‌های عددی برای حل مسئله کنترل بهینه به دو دسته روش‌های مستقیم^{۱۱} و غیرمستقیم^{۱۲} تقسیم می‌شوند [۳۲-۲۷]. در روش‌های غیرمستقیم، با استفاده از حساب تغییرات و اصل کمینه پونتریاگین [۳۳]، شرایط بهینگی مرتبه اول زمان-پیوسته به صورت یک مسئله مقدار مرزی در دو نقطه مجزا^{۱۳} به دست می‌آید. این مسئله شامل دو دسته معادلات دیفرانسیل حالت و کمک حالت است و برای حل آن از روش پرتابی استفاده می‌شود [۲۸]. با توجه به آن که برای متغیرهای کمک حالت تعبیر فیزیکی وجود ندارد، یافتن حدس اولیه مناسب برای شرایط اولیه متغیرهای کمک حالت در روش پرتابی، دشوار است. در روش‌های مستقیم، مسئله کنترل بهینه زمان-پیوسته با استفاده از روش‌های گسسته‌سازی، گسسته شده و به یک مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی^{۱۴} تبدیل می‌شود [۲۸]. سپس مسئله برنامه‌ریزی

11 Direct methods
12 Indirect methods
13 Two-point boundary value problem (TPBVP)
14 Nonlinear programming (NLP)
15 Gradient-based methods
16 Heuristic algorithms
17 Global collocation methods
18 Lobatto Pseudospectral method
19 Radau Pseudospectral method
20 Karush-Kuhn-Tucker conditions

1 Shooting method
2 Pseudospectral method
3 Homotopy method
4 Particle swarm optimization (PSO)
5 Differential evolution (DE)
6 Bacteria foraging optimization (BFO)
7 Inverse-dynamics
8 Sequential gradient-restoration
9 Sequential convex programming (SCP)
10 Derivative-free optimization

و به دست آوردن مسیرهای حالت و ورودی کنترلی بهینه می توان از اثر عدم قطعیت ها، اغتشاشات و همچنین مدل سازی دینامیک عملگرها صرف نظر کرد و اثرات آنها را در طراحی قانون کنترلی حلقه بسته اعمال کرد.

در ادامه، ابتدا مدل دینامیکی نسبی فضاپیما تعقیب کننده نسبت به فضاپیما هدف بیان می شود. سپس، مسئله کنترل بهینه کمترین زمان تعریف شده و با استفاده از روش شبه طیفی گاوس به مسئله برنامه ریزی غیرخطی تبدیل می شود. با حل مسئله برنامه ریزی غیرخطی، مسیرهای حالت و ورودی کنترلی زمان بهینه به دست می آیند. مانند بسیاری از مسئله های کنترل بهینه کمترین زمان، مسیرهای ورودی کنترلی بنگ-بنگ هستند که از نظر سیستمی این ورودی کنترلی را می توان با استفاده از تراسترهای on-off به فضاپیما اعمال کرد. در انتها، با استفاده از ضرائب KKT به دست آمده از حل مسئله برنامه ریزی غیرخطی، مسیرهای کمک حالت تخمین زده شده و اثبات بهینگی مرتبه اول، مورد بررسی قرار می گیرد.

۲- مدل دینامیکی نسبی

زمانی که فاصله نسبی بین دو فضاپیما زیاد باشد، حرکت انتقالی آنها معمولاً در دستگاه مختصات اینرسی زمین-مرکز^۴ توصیف می شود. زمانی که فاصله بین دو فضاپیما در مقایسه با فاصله شعاعی آنها تا مرکز جرم زمین، بسیار کم باشد، معمولاً حرکت انتقالی نسبی آنها در دستگاه مختصات مرجع مداری^۵ فضاپیما هدف توصیف می شود. مرکز این دستگاه، مختصات منطبق بر مرکز جرم فضاپیما هدف است و محورهای آن به این صورت تعریف می شوند: محور Z به صورت شعاعی به سمت مرکز جرم زمین است. محور X در صفحه مدار، عمود بر محور Z و در جهت بردار سرعت است. محور Y عمود بر صفحه مدار و کامل کننده قانون دست راست است. دستگاه مختصات اینرسی زمین-مرکز، دستگاه مختصات مرجع مداری فضاپیما هدف و

است. به عنوان نمونه، این مسئله برای انجام مانور مجاورت یک فضاپیما تعقیب کننده^۱ با یک فضاپیما هدف^۲، فرمول بندی شده و با استفاده از روش شبه طیفی گاوس حل شده است. ملاحظاتی از جمله متقارن یا نامتقارن بودن فضاپیما، در نظر گرفتن دینامیک مداری در مدل سازی دینامیک های انتقالی و دورانی فضاپیما و همچنین در نظر گرفتن کوپلینگ میان کنترل وضعیت و موقعیت فضاپیما، پیچیدگی مسئله و حل به دست آمده برای آن را تحت تاثیر قرار می دهد. در حل این مسئله فرض شده که عملگرهای تراستری کنترل وضعیت و موقعیت، مجزا و نسبت به دستگاه بدنی ثابت هستند. در این حالت ورودی کنترلی بهینه برای کنترل موقعیت فضاپیما، تحت تاثیر وضعیت آن خواهد بود و بین کنترل وضعیت و موقعیت فضاپیما کوپلینگ وجود دارد. بر اساس مطالعات انجام شده بر روی پیشینه پژوهش حاضر، نوآوری این پژوهش در موارد زیر است:

- توسعه مسئله مانور وضعیت زمان بهینه به مسئله مانور شش درجه آزادی زمان بهینه شامل مانور هم زمان وضعیت و موقعیت، برای یک فضاپیما نامتقارن،
- اعمال دینامیک مداری و کوپلینگ میان کنترل وضعیت و موقعیت در مدل سازی دینامیکی فضاپیما،
- ارائه حل بهینه برای مسئله مذکور به گونه ای که حل به دست آمده شرایط بهینگی مرتبه اول را برآورده می کند.

به طور کلی در سیستم های دینامیکی غیرخطی و مرتبه بالا ($n \geq 3$)، برای مسئله کنترل بهینه کمترین زمان، حل بسته^۳ وجود ندارد و حل این مسئله با روش های متداول در کنترل بهینه (روش های مستقیم و غیرمستقیم) منجر به یک ساختار کنترلی حلقه باز می شود [۴۵]. در کاربردهای واقعی به منظور دستیابی به عملکرد مقاوم سیستم نسبت به عدم قطعیت ها و اغتشاشات باید یک قانون کنترلی حلقه بسته برای ردیابی مسیرهای حالت بهینه طراحی شود. بنابراین، در حل مسئله کنترل بهینه کمترین زمان

4 Earth-centered inertial coordinate system (ECI)
5 Local vertical-local horizontal coordinate system (LVLH)

1 Chaser spacecraft
2 Target spacecraft
3 Closed-form solution

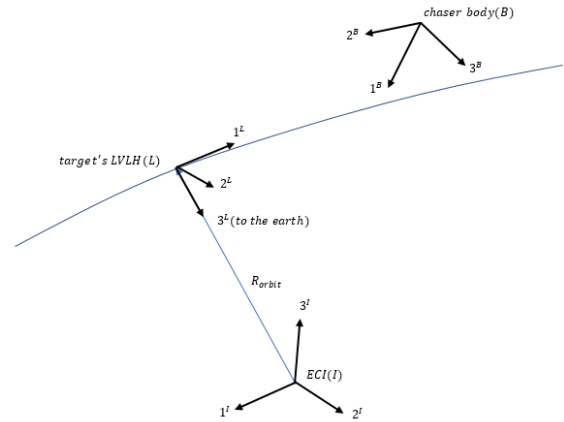
به دستگاه بدنی تعقیب کننده است. ماتریس $I_B = \text{diag}([I_1, I_2, I_3]) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ماتریس اینرسی فضاپیمای تعقیب کننده حول محورهای ممان اینرسی اصلی آن است. در اینجا فرض شده که محورهای دستگاه بدنی تعقیب کننده بر محورهای ممان اینرسی اصلی آن منطبق است. بردارهای $[\omega^{BL}]^B = [\omega_1, \omega_2, \omega_3]^T \in \mathbb{R}^3$ بیانگر بردارهای سرعت زاویه‌ای دستگاه بدنی تعقیب کننده نسبت به دستگاه مرجع مداری هدف، سرعت زاویه‌ای دستگاه مرجع مداری هدف نسبت به دستگاه اینرسی زمین- مرکز هستند. این سه بردار در دستگاه بدنی تعقیب کننده بیان شده‌اند. بردار $[T]^B = [T_1, T_2, T_3]^T \in \mathbb{R}^3$ بیانگر بردار گشتاورهای کنترلی وارد بر فضاپیمای تعقیب کننده است و در دستگاه بدنی تعقیب کننده بیان شده است. با فرض اینکه فضاپیمای هدف در مدار دایروی قرار داشته باشد، بردار ω^{LI} ثابت است. در نتیجه، معادله اوپلر در معادله (۱) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$I_B [D^B [\omega^{BL}]^B] + [\omega^{BL}]^B \times (I_B [\omega^{BL}]^B) + [\omega^{LI}]^B \times (I_B [\omega^{BI}]^B) = [T]^B \quad (2)$$

به منظور توصیف سینماتیک دورانی دستگاه بدنی تعقیب کننده نسبت به دستگاه مرجع مداری هدف، از پارامترهای رودریگز اصلاح یافته^۱ استفاده شده است. این پارامترها به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\sigma = [\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3]^T = \begin{bmatrix} e_1 \tan\left(\frac{\Phi}{4}\right) \\ e_2 \tan\left(\frac{\Phi}{4}\right) \\ e_3 \tan\left(\frac{\Phi}{4}\right) \end{bmatrix} \quad (3)$$

دستگاه مختصات بدنی فضاپیمای تعقیب کننده در شکل ۱ نشان داده شده است.



شکل ۱. دستگاه مختصات اینرسی زمین- مرکز I ، دستگاه مختصات مرجع مداری فضاپیمای هدف L ، دستگاه مختصات بدنی فضاپیمای تعقیب کننده B

با فرض اینکه دستگاه بدنی هدف منطبق بر دستگاه مرجع مداری هدف است، برای یک مانور مجاورت می‌توان دینامیک دورانی نسبی دستگاه بدنی تعقیب کننده را نسبت به دستگاه مرجع مداری هدف توصیف کرد. برای توصیف دینامیک دورانی دستگاه بدنی تعقیب کننده نسبت به دستگاه مرجع مداری هدف که یک دستگاه غیراینرسیایی است از فرم برداری معادله اوپلر در معادله (۱) استفاده می‌شود [۴۶]:

$$I_B [D^B [\omega^{BL}]^B] + [\omega^{BL}]^B \times (I_B [\omega^{BL}]^B) + I_B [D^L [\omega^{LI}]^B] + [\omega^{LI}]^B \times (I_B [\omega^{BI}]^B) = [T]^B \quad (1)$$

که در آن حروف B ، L و I به ترتیب بیانگر دستگاه بدنی تعقیب کننده، دستگاه مرجع مداری هدف و دستگاه اینرسی زمین- مرکز هستند. D^B بیانگر عملگر مشتق زمانی دورانی نسبت

که در آن ω_n ، سرعت زاویه‌ای مداری و m جرم فضاپیمای تعقیب کننده است. D^L ، بیانگر عملگر مشتق زمانی دورانی نسبت به دستگاه مرجع مداری هدف است. بردارهای $[v_B^L]^L = [v_1, v_2, v_3]^T \in \mathbb{R}^3$ و $[s_{BL}]^L = [s_1, s_2, s_3]^T \in \mathbb{R}^3$ به ترتیب بیانگر بردارهای سرعت و موقعیت مرکز جرم فضاپیمای تعقیب کننده نسبت به دستگاه مرجع مداری هدف هستند. این دو بردار، در دستگاه مرجع مداری هدف بیان شده‌اند. بردار $[F]^L \in \mathbb{R}^3$ ، بیانگر بردار نیروهای کنترلی وارد بر فضاپیمای تعقیب کننده است و در دستگاه مرجع مداری هدف بیان شده است.

با توجه به آن که مولفه‌های نیروهای کنترلی معمولاً در دستگاه بدنی فضاپیمای تعقیب کننده بیان می‌شوند، بنابراین، برای به دست آوردن مولفه‌های نیروی کنترلی در دستگاه مرجع مداری هدف باید تبدیل زیر انجام شود:

$$[F]^L = T^{LB}[F]^B \quad (7)$$

که در آن $[F]^B = [F_1, F_2, F_3]^T \in \mathbb{R}^3$ ، بیانگر بردار نیروهای کنترلی وارد بر فضاپیمای تعقیب کننده در دستگاه بدنی تعقیب کننده است. همچنین T^{LB} ، بیانگر ماتریس انتقال از دستگاه بدنی تعقیب کننده به دستگاه مرجع مداری هدف است.

۳- تعریف مسئله کنترل بهینه

مسئله کنترل بهینه در فرم کلی به صورت زیر تعریف می‌شود:

کمینه‌سازی تابع هزینه به فرم بولزا^۲ در معادله (۸)، به گونه‌ای که قیود مسئله شامل قیود دینامیکی، شرایط مرزی و قیود نامساوی مسیر که به ترتیب در معادلات (۹) تا (۱۱) بیان شده‌اند، برآورده شوند:

که در آن e_1, e_2, e_3 مولفه‌های بردار اصلی اوپلر و زاویه Φ بیانگر زاویه دوران حول محور اصلی اوپلر است. معادله دیفرانسیل سینماتیک دورانی با استفاده از پارامترهای رودریگز اصلاح یافته، در فرم برداری به صورت معادله (۴) بیان می‌شود [۴۷]:

$$\dot{\sigma} = \frac{1}{4} B(\sigma) [\omega^{BL}]^B \quad (4)$$

با تعریف $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2$ ، ماتریس $B(\sigma)$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$B(\sigma) = \begin{bmatrix} 1 - \sigma^2 + 2\sigma_1^2 & 2(\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3) & 2(\sigma_1\sigma_3 + \sigma_2) \\ 2(\sigma_2\sigma_1 + \sigma_3) & 1 - \sigma^2 + 2\sigma_2^2 & 2(\sigma_2\sigma_3 - \sigma_1) \\ 2(\sigma_3\sigma_1 - \sigma_2) & 2(\sigma_3\sigma_2 + \sigma_1) & 1 - \sigma^2 + 2\sigma_3^2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

به منظور توصیف دینامیک و سینماتیک انتقالی فضاپیمای تعقیب کننده نسبت به دستگاه مرجع مداری هدف، با فرض اینکه فاصله نسبی بین دو فضاپیمای تعقیب کننده و هدف به نسبت فاصله شعاعی آنها تا مرکز زمین بسیار کم باشد و در شرایطی که اغتشاشات مداری قابل صرف نظر باشند، از معادله (۶) استفاده می‌شود [۴۸]. این معادله با نام معادله «هیلز»^۱ شناخته می‌شود:

$$\begin{bmatrix} D^L[v_B^L]^L \\ D^L[s_{BL}]^L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{3 \times 3} & N_{3 \times 3} \\ -I_3 & 0_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [v_B^L]^L \\ [s_{BL}]^L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} [F]^L \\ 0_{3 \times 1} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$M_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2\omega_n \\ 0 & 0 & 0 \\ 2\omega_n & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$N_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_n^2 & 0 \\ 0 & 0 & -3\omega_n^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} D^L[v_B^L]^L \\ D^L[s_{BL}]^L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} T^{LB} [F]^B \\ 0_{3 \times 1} \\ - \begin{bmatrix} M_{3 \times 3} & N_{3 \times 3} \\ -I_3 & 0_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [v_B^L]^L \\ [s_{BL}]^L \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$M_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2\omega_n \\ 0 & 0 & 0 \\ 2\omega_n & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$N_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_n^2 & 0 \\ 0 & 0 & -3\omega_n^2 \end{bmatrix}$$

$$x_0 = [[\omega^{BL}]^B, \sigma, [v_B^L]^B, [s_{BL}]^B]_{t=t_0}^T$$

$$x_f = [[\omega^{BL}]^B, \sigma, [v_B^L]^B, [s_{BL}]^B]_{t=t_f}^T \quad (14)$$

$$|T_i| \leq T_{i,max}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (15)$$

$$|F_i| \leq F_{i,max}, \quad i = 1, 2, 3$$

در این مسئله بردار حالت و ورودی کنترلی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$x = [[\omega^{BL}]^B, \sigma, [v_B^L]^L, [s_{BL}]^L]^T \quad (16)$$

$$u = [[T]^B, [F]^B]^T$$

$$J = \phi(x(t_0), t_0, x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t) dt \quad (8)$$

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), u(t), t) \quad (9)$$

$$\phi(x(t_0), t_0, x(t_f), t_f) = 0 \quad (10)$$

$$C(x(t), u(t), t) \leq 0 \quad (11)$$

که $x(t) \in \mathbb{R}^n$ و $u(t) \in \mathbb{R}^m$ به ترتیب بیانگر بردارهای حالت و ورودی کنترلی و t_0 و t_f به ترتیب بیانگر زمان ابتدایی و زمان انتهایی بازه حل مسئله هستند. بر این اساس، مسئله کنترل بهینه کمترین زمان وضعیت و موقعیت فضاپیما به صورت شش درجه آزادی، به صورت زیر تعریف می‌شود:

کمینه‌سازی تابع هزینه در معادله (۱۲) به گونه‌ای که قیود دینامیکی، شرایط مرزی و قیود بر روی نیروها و گشتاورهای کنترلی، که به ترتیب در معادلات (۱۳) تا (۱۵) بیان شده‌اند، برآورده شوند:

$$J = t_f \quad (12)$$

$$D^B[\omega^{BL}]^B = I_B^{-1}([T]^B - [\omega^{BL}]^B \times (I_B[\omega^{BL}]^B) - [\omega^{LI}]^B \times (I_B[\omega^{BI}]^B))$$

$$\dot{\sigma} = \frac{1}{4} B(\sigma)[\omega^{BL}]^B \quad (13)$$

۴- روش شبه‌طیفی گاوس

مسئله کنترل بهینه توصیف شده در معادلات (۱۲) تا (۱۵) با استفاده از روش‌های حل عددی قابل حل است. یک دسته از روش‌های حل عددی مسائل کنترل بهینه، روش‌های شبه‌طیفی هستند. در این روش‌ها با گسسته‌سازی مسیرهای حالت و ورودی کنترلی در نقاط تطبیق و با استفاده از برازش چندجمله‌ای‌های لاگرانژ^۱ بر این نقاط، مسیرهای حالت و ورودی کنترلی تقریب زده می‌شوند. پس از آن برآورده‌سازی قیود دینامیکی تنها در نقاط

$\tau_0 = -1$ و نقطه ابتدایی $\tau_1 < \dots < \tau_N < 1$ به صورت معادله (۲۲) تقریب زده می‌شوند [۴۹]:

$$x(\tau) \approx X(\tau) = \sum_{i=0}^N X(\tau_i) L_i(\tau) \quad (22)$$

که در آن، $L_i(\tau)$ چندجمله‌ای‌های لاگرانژ هستند و به صورت زیر تعریف می‌شوند [۴۹]:

$$L_i(\tau) = \prod_{j=0, j \neq i}^N \frac{\tau - \tau_j}{\tau_i - \tau_j}, \quad i = 0, \dots, N \quad (23)$$

همچنین، با در نظر گرفتن نقاط تطبیق $\tau_k, k = 1, \dots, N$ مسیرهای ورودی کنترلی با استفاده از برازش چندجمله‌ای‌های لاگرانژ $L_i^*(\tau)$ به صورت معادله (۲۴) تقریب زده می‌شوند [۴۹]:

$$u(\tau) = U(\tau) = \sum_{i=1}^N U(\tau_i) L_i^*(\tau) \quad (24)$$

که در آن $L_i^*(\tau)$ به صورت زیر تعریف می‌شود [۴۹]:

$$L_i^*(\tau) = \prod_{j=1, j \neq i}^N \frac{\tau - \tau_j}{\tau_i - \tau_j} \quad (25)$$

می‌توان نشان داد که چندجمله‌ای‌های لاگرانژ در معادلات (۲۳) و (۲۵)، خاصیت انزوا^۳ را به صورت معادله (۲۶) برآورده می‌کنند [۴۹]:

تطبیق مورد بررسی قرار گرفته و بدین ترتیب، قیود دینامیکی به یک مجموعه قیود جبری تبدیل می‌شوند. با این تبدیل، مسئله کنترل بهینه زمان-پیوسته گسسته شده و به یک مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی تبدیل می‌شود. در این پژوهش، برای حل مسئله کنترل بهینه از روش شبه‌طیفی گاوس استفاده شده است. در این روش نقاط تطبیق، ریشه‌های چندجمله‌ای لژاندر^۱ هستند و با نام نقاط «لژاندر-گاوس»^۲ شناخته می‌شوند. از آنجایی که این نقاط در بازه $(-1, 1)$ قرار می‌گیرند، باید بازه زمانی حل مسئله کنترل بهینه، با استفاده از تبدیل بیان شده در معادله (۱۷)، از $t \in [t_0, t_f]$ به $\tau \in [-1, 1]$ تبدیل شود.

$$\tau = \frac{2t}{t_f - t_0} - \frac{t_f + t_0}{t_f - t_0} \quad (17)$$

با استفاده از این تبدیل، فرم کلی مسئله کنترل بهینه که در معادلات (۸) تا (۱۱) بیان شده است، به فرم معادلات (۱۸) تا (۲۱) تبدیل می‌شود:

$$J = \phi(x(-1), t_0, x(1), t_f) + \frac{t_f - t_0}{2} \int_{-1}^1 g(x(\tau), u(\tau), \tau; t_0, t_f) d\tau \quad (18)$$

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{t_f - t_0}{2} f(x(\tau), u(\tau), \tau; t_0, t_f) \quad (19)$$

$$\phi(x(-1), t_0, x(1), t_f) = 0 \quad (20)$$

$$C(x(\tau), u(\tau), \tau; t_0, t_f) \leq 0 \quad (21)$$

در روش شبه‌طیفی گاوس، مسیرهای حالت با استفاده از برازش چندجمله‌ای‌های لاگرانژ بر مجموعه نقاط تطبیق $-1 <$

متغیرهای حالت در زمان انتهایی X_f یا X_{N+1} با استفاده از کوادراتور گاوس^۱ به صورت معادله (۳۰) مقید می‌شود [۵۰]:

$$X_f = X_0 + \frac{t_f - t_0}{2} \sum_{k=1}^N w_k f(X_k, U_k, \tau_k; t_0, t_f) \quad (30)$$

که در آن w_k وزن‌های گاوسی هستند. همچنین تابع هزینه زمان-پیوسته در معادله (۱۸)، با استفاده از کوادراتور گاوس به صورت معادله (۳۱) تقریب زده می‌شود [۳۶]:

$$J = \phi(X_0, t_0, X_f, t_f) + \frac{t_f - t_0}{2} \sum_{k=1}^N w_k g(X_k, U_k, \tau_k; t_0, t_f) \quad (31)$$

در نهایت فرم گسسته شرایط مرزی و قیود مسیر که به ترتیب در معادلات (۲۰) و (۲۱) بیان شده‌اند، به صورت معادلات (۳۲) و (۳۳) است:

$$\phi(X_0, t_0, X_f, t_f) = 0 \quad (32)$$

$$C(X_k, U_k, \tau_k; t_0, t_f) \leq 0, \quad (k = 1, \dots, N) \quad (33)$$

تابع هزینه بیان شده در معادله (۳۱) به همراه قیود جبری در معادلات (۲۹)، (۳۰)، (۳۲) و (۳۳)، یک مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی را تشکیل می‌دهند. با حل این مسئله، یک حل تقریبی برای مسئله کنترل بهینه زمان-پیوسته که در معادلات (۸) تا (۱۱) توصیف شده است، به دست می‌آید.

در بعضی مسائل کنترل بهینه، در مسیرهای حالت و ورودی کنترلی ناپیوستگی‌هایی وجود دارد. یک ایده مناسب برای افزایش دقت حل به دست آمده در این مسائل، تقسیم بازه زمانی حل مسئله کنترل بهینه به چند زیربازه است. در این حالت برآورده‌سازی قیود دینامیکی جبری (معادله ۲۹)، در نقاط تطبیق درون هر زیربازه مورد بررسی قرار می‌گیرد. سپس، به منظور برقراری پیوستگی مسیرهای حالت، شرایط مرزی در فصل

$$L_i(\tau_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad L_i^*(\tau_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (26)$$

با مشتق‌گیری از معادله (۲۲)، مشتق $\dot{x}(\tau)$ در نقاط تطبیق τ_k ، به صورت معادله (۲۷) است [۳۶]:

$$\dot{x}(\tau_k) \approx \dot{X}(\tau_k) = \sum_{i=0}^N x(\tau_i) \dot{L}_i(\tau_k), \quad k = 1, \dots, N \quad (27)$$

مشتق چندجمله‌ای‌های لاگرانژ در نقاط تطبیق $\dot{L}_i(\tau_k)$ را می‌توان به فرم ماتریس مشتق‌گیری $D \in \mathbb{R}^{N \times N+1}$ بیان کرد. درایه‌های این ماتریس مشتق‌گیری با استفاده از معادله (۲۴) محاسبه می‌شوند [۳۶]:

$$D_{ki} = \dot{L}_i(\tau_k) = \sum_{l=0}^N \frac{\prod_{j=0, j \neq i, l}^N (\tau_k - \tau_j)}{\prod_{j=0, j \neq i}^N (\tau_i - \tau_j)} \quad (28)$$

که در آن $i = 0, \dots, N$ و $k = 1, \dots, N$ است. با استفاده از ماتریس مشتق‌گیری D ، قیود دینامیکی بیان شده در معادله (۱۹) به یک مجموعه قیود جبری به صورت معادله (۲۹) تبدیل می‌شوند [۳۶]:

$$\sum_{i=0}^N D_{ki} X_i - \frac{t_f - t_0}{2} f(X_k, U_k, \tau_k; t_0, t_f) = 0, \quad k = 1, \dots, N \quad (29)$$

که در آن $U_k \equiv U(\tau_k) \in \mathbb{R}^m$ و $X_k \equiv X(\tau_k) \in \mathbb{R}^n$ است. به ترتیب بیانگر بردارهای حالت و ورودی کنترلی هستند. در روش شبه‌طیفی گاوس، تحقق قیود دینامیکی تنها در نقاط تطبیق مورد بررسی قرار می‌گیرد. بنابراین، مقدار

$$0 = \frac{\partial g}{\partial u} + \lambda^T \frac{\partial f}{\partial u} - \mu^T \frac{\partial C}{\partial u} = \frac{\partial H}{\partial u}$$

$$\phi(x(\tau_0), t_0, x(\tau_f), t_f) = 0$$

$$\lambda(\tau_0) = -\frac{\partial \phi}{\partial x(\tau_0)} + v^T \frac{\partial \phi}{\partial x(\tau_0)}$$

$$\lambda(\tau_f) = \frac{\partial \phi}{\partial x(\tau_f)} - v^T \frac{\partial \phi}{\partial x(\tau_f)}$$

$$H(t_0) = \frac{\partial \phi}{\partial t_0} - v^T \frac{\partial \phi}{\partial t_0}$$

$$H(t_f) = -\frac{\partial \phi}{\partial t_f} + v^T \frac{\partial \phi}{\partial t_f}$$

$$\mu_j(\tau) = 0, \quad \text{when } C_j(x, u, \tau; t_0, t_f) < 0, \\ j = 1, \dots, c$$

$$\mu_j(\tau) \leq 0, \quad \text{when } C_j(x, u, \tau; t_0, t_f) = 0, \\ j = 1, \dots, c$$

که در آن $v \in \mathbb{R}^q$ ، بردار ضرایب لاگرانژ مربوط به شرایط مرزی است.

در روش شبه‌طیفی گاوس می‌توان از ضرایب KKT که از حل مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی به‌دست می‌آیند، برای تخمین کمک‌حالت (λ) و اثبات بهینگی مرتبه اول استفاده کرد. با استفاده از این ضرایب می‌توان برای یک مسئله کنترل بهینه زمان-پیوسته، مقدار متغیرهای کمک‌حالت را در نقاط تطبیق و نقاط مرزی تخمین زد. تخمین کمک‌حالت در روش شبه‌طیفی گاوس بر اساس قضیه زیر انجام می‌شود:

قضیه ۱ (قضیه نگاشت کمک‌حالت^۲): با استفاده از ضرایب KKT می‌توان مقدار متغیرهای کمک‌حالت را در زمان ابتدایی، زمان انتهایی و نقاط تطبیق به‌صورت معادله (۳۷) تخمین زد:

$$\Lambda_k = \frac{\tilde{\Lambda}_k}{w_k} + \tilde{\Lambda}_f \\ \Lambda_0 = \tilde{\Lambda}_0, \quad \Lambda_f = \tilde{\Lambda}_f \quad (37)$$

مشترک زیربازه‌ها مقید می‌شود [۳۵، ۳۷]. بنابراین، شرایط مرزی بیان شده در معادله (۳۲) با معادله (۳۴) جایگزین می‌شود:

$$\mathcal{L}^{(1)}(X_0^{(1)}, t_0^{(1)}) = 0 \\ \mathcal{L}^{(r+1)}(X_f^{(r)}, t_f^{(r)}, X_0^{(r+1)}, t_0^{(r+1)}) = 0 \\ \mathcal{L}^{(P)}(X_f^{(P)}, t_f^{(P)}) = 0 \quad (34)$$

که در آن P ، تعداد زیربازه‌ها و $r = 1, \dots, P-1$ است [۳۷].

۵- تخمین کمک‌حالت

مسئله کنترل بهینه زمان-پیوسته تبدیل یافته در معادلات (۱۸) تا (۲۱) را می‌توان با استفاده از حساب تغییرات و اصل کمینه پونتریاگین [۳۳] برای به‌دست آوردن شرایط بهینگی مرتبه اول، حل کرد. شرایط بهینگی مرتبه اول با محاسبه تغییرات مرتبه اول تابع همیلتونین H در معادله (۳۵) به‌دست می‌آیند:

$$H(x, \lambda, \mu, u, \tau; t_0, t_f) \\ = g(x, u, \tau; t_0, t_f) \\ + \lambda^T f(x, u, \tau; t_0, t_f) \\ - \mu^T C(x, u, \tau; t_0, t_f) \quad (35)$$

که در آن $\lambda \in \mathbb{R}^n$ بردار کمک‌حالت و $\mu \in \mathbb{R}^c$ بردار ضرایب لاگرانژ مربوط به قیود مسیر است. شرایط بهینگی مرتبه اول در معادله (۳۶) بیان شده‌اند [۴۵]:

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{t_f - t_0}{2} f(x(\tau), u(\tau), \tau; t_0, t_f) \\ = \frac{t_f - t_0}{2} \frac{\partial H}{\partial \lambda} \\ \frac{d\lambda}{d\tau} = \frac{t_f - t_0}{2} \left(-\frac{\partial g}{\partial x} - \lambda^T \frac{\partial f}{\partial x} + \mu^T \frac{\partial C}{\partial x} \right) \\ = -\frac{t_f - t_0}{2} \frac{\partial H}{\partial x} \quad (36)$$

۱	- تعیین حدس اولیه برای متغیرهای حالت و ورودی کنترلی در تمام نقاط تطبیق و t_f (S_0)
۲	- تعیین تابع قیود مساوی غیرخطی برای محاسبه قیود دینامیکی جبری از معادله (۲۹) و قیود مرزی از معادلات (۳۰) و (۳۴) (نام تابع: NonlinConst_fun) - تعیین تابع محاسبه مقدار تابع هزینه از معادله (۳۱) (نام تابع: Cost_fun)
۳	- یافتن حل بهینه مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی با روش SQP $[S_{opt}, \tilde{\Lambda}] = \text{SQP}(\text{Cost_fun}, \text{NonlinConst_fun}, S_0, B_l, B_u)$
۴	- تخمین مسیره‌های کمک‌حالت با استفاده از ضرایب KKT، $\tilde{\Lambda}$ از معادله (۳۷)

سناریوی این شبیه‌سازی به‌صورت یک مانور مجاورت شش درجه آزادی بین دو فضاپیما که در یک مدار قرار گرفته‌اند، است. در زمان ابتدایی، فضاپیمای تعقیب کننده ۲۰ متر جلوتر از فضاپیمای هدف قرار گرفته و دستگاه بدنی تعقیب کننده منطبق بر دستگاه مرجع مداری هدف است. در زمان انتهایی مانور، فضاپیمای تعقیب کننده باید در موقعیت ۱۰ متری بالای فضاپیمای هدف قرار بگیرد و همچنین دستگاه بدنی تعقیب کننده باید یک دوران خالص حول محور 2^B داشته باشد. شماتیک این سناریو در شکل ۲ نشان داده شده است. پارامترهای فضاپیمای تعقیب کننده که بر اساس مشخصات فضاپیمای NASA X-ray Timing Explorer (XTE) انتخاب شده، در جدول ۲ بیان شده است [۵۱]. همچنین، مقدار متغیرهای حالت فضاپیمای تعقیب کننده در زمان ابتدایی و انتهایی مانور، در جدول ۳ بیان شده است. در این شبیه‌سازی، فرض شده است که محورهای بدنی فضاپیمای تعقیب کننده دارای عملگرهای تراستری مجزا برای تولید نیروها و گشتاورهای کنترلی هستند. همچنین با توجه به اینکه در این شبیه‌سازی هدف به‌دست آوردن مسیره‌های حالت و ورودی کنترلی بهینه است، مدل عملگرهای تراستری به‌صورت ایده‌آل در نظر گرفته شده است. ملاحظات مربوط به اعمال ورودی

که در آن $\tilde{\Lambda}_k$ ، $\tilde{\Lambda}_0$ و $\tilde{\Lambda}_f$ به ترتیب ضرایب KKT مربوط به قیود دینامیکی در نقاط تطبیق، شرایط مرزی در زمان ابتدایی و شرایط مرزی در زمان انتهایی هستند. Λ_k ، Λ_0 و Λ_f به ترتیب بردار کمک‌حالت تخمین زده شده در نقاط تطبیق، زمان ابتدایی و زمان انتهایی هستند [۳۶].

۶- شبیه‌سازی عددی

در این بخش مسئله کنترل بهینه توصیف شده در معادلات (۱۲) تا (۱۵) با استفاده از روش شبه‌طیفی گاوس حل شده است. با استفاده از این روش، مسئله کنترل بهینه زمان-پیوسته به مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی تبدیل شده و سپس با استفاده از روش برنامه‌ریزی درجه دوم متوالی^۱ حل شده است. با توجه به اینکه در مسئله کنترل بهینه کمترین زمان، زمان انتهایی آزاد است، بنابراین، متغیرهای مسئله کنترل بهینه علاوه بر مقدار متغیرهای حالت و ورودی کنترلی در نقاط تطبیق، شامل زمان انتهایی مانور t_f نیز می‌شوند. شبه کد حل مسئله کنترل بهینه با استفاده از روش شبه‌طیفی گاوس و همچنین تخمین مسیره‌های کمک‌حالت با استفاده از ضرایب KKT در جدول ۱ بیان شده است.

جدول ۱. شبه کد حل مسئله کنترل بهینه با استفاده از روش

شبه‌طیفی گاوس

شماره مرحله	عملیات
۱	- تعیین شرایط اولیه و انتهایی بردار متغیرهای حالت (x_f و x_0) - تعیین تعداد زیربازه‌ها و تعداد نقاط تطبیق در هر زیربازه (n و n_t) - تعیین کران بالا و پایین برای متغیرهای حالت و ورودی کنترلی در تمام نقاط تطبیق و t_f (B_l و B_u)

1 Sequential quadratic programming (SQP)

مقدار	واحد	مشخصات فضاپیمای تعقیب کننده
$I_1 = 5621, I_2 = 4547, I_3 = 2364$	Kg.m ²	ممان های اینرسی
$m = 3200$	Kg	جرم
$T_{max} = [50, 50, 50]^T$	Nm	ماکزیمم گشتاورهای کنترلی قابل تولید
$F_{max} = [320, 320, 320]^T$	N	ماکزیمم نیروهای کنترلی قابل تولید
$h_{orbit} = 580$	Km	ارتفاع مداری

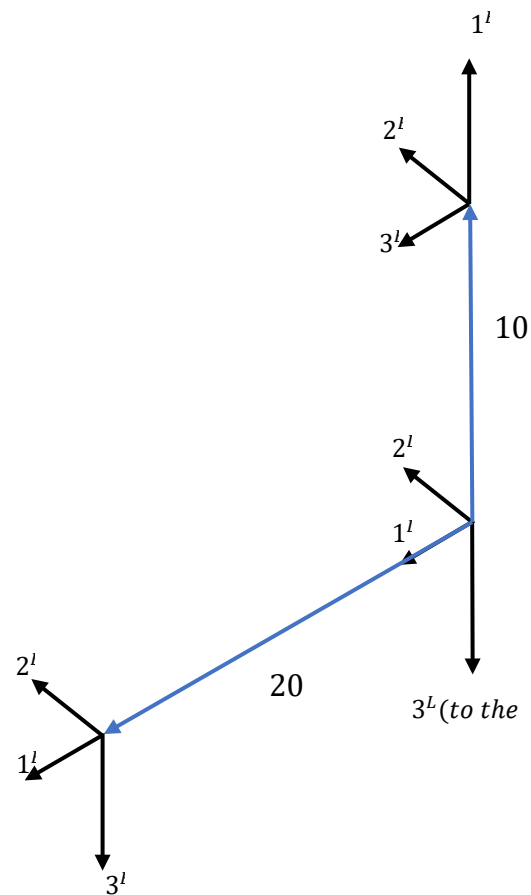
جدول ۳. مقدار متغیرهای حالت فضاپیمای تعقیب کننده در زمان ابتدایی و زمان انتهایی مانور

شرایط انتهایی	شرایط ابتدایی	واحد	متغیرهای حالت فضاپیمای تعقیب کننده
$[0, 0, 0]^T$	$[0, 0, 0]^T$	rad/s	$[\omega^{BL}]^B$
$\left[0, \tan\left(\frac{90^\circ}{2}\right), 0\right]^T = [0, 0.4142, 0]^T$	$[0, 0, 0]^T$	واحد ندارد	σ
$[0, 0, 0]^T$	$[0, 0, 0]^T$	m/s	$[v_B^L]^L$
$[0, 0, -10]^T$	$[20, 0, 0]^T$	m	$[s_{BL}]^L$

در پژوهش های گذشته [۷-۵، ۱۰] نشان داده شده است که ساختار کنترلی برای یک مانور وضعیت زمان بهینه، با در نظر گرفتن قید مکعبی بر روی مقدار گشتاورهای کنترلی، به صورت بنگ-بنگ است. به طور مشابه، نتایج شبیه سازی در شکل های ۳ و ۴ نشان می دهد که برای یک مانور شش درجه آزادی زمان بهینه، با در نظر گرفتن قید مکعبی بر روی مقدار نیروها و گشتاورهای کنترلی نیز، ساختار کنترلی به صورت بنگ-بنگ است. مدت زمان مانور شش درجه آزادی زمان بهینه در سناریوی مورد نظر $t_f = 25.8727 \text{ sec}$ است. بیلیموریا و وای [۵] برای

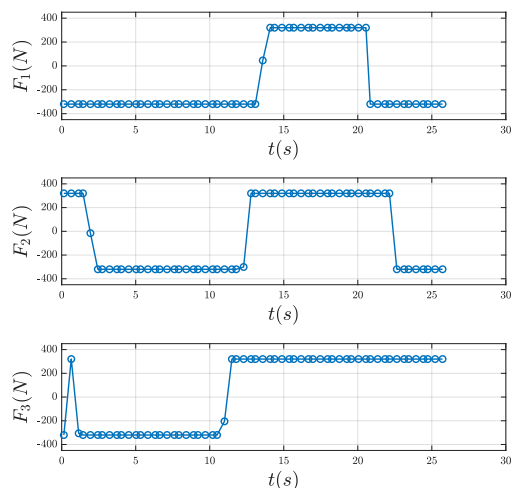
کنترلی بهینه توسط عملگر (مانند تاخیر، ناهمواری سطح تراست و ...) باید در طراحی سیستم کنترل مورد بررسی قرار گیرد.

تعداد زیربازه ها در گسسته سازی مسئله کنترل بهینه با استفاده از روش شبه طیفی گاوس، ۲۰ و تعداد نقاط تطبیق در هر زیربازه، ۳ در نظر گرفته شده است. همچنین، فرض شده که بازه ی زمانی زیربازه ها یکسان است. نتایج شبیه سازی این سناریو در شکل های ۳ تا ۱۰ نشان داده شده است. تاریخچه زمانی نشان داده شده برای تغییرات زوایای اوایلر در شکل ۷ با ترتیب دوران YXZ است.



شکل ۲. شماتیک سناریوی شبیه سازی مانور مجاورت مداری شش درجه آزادی

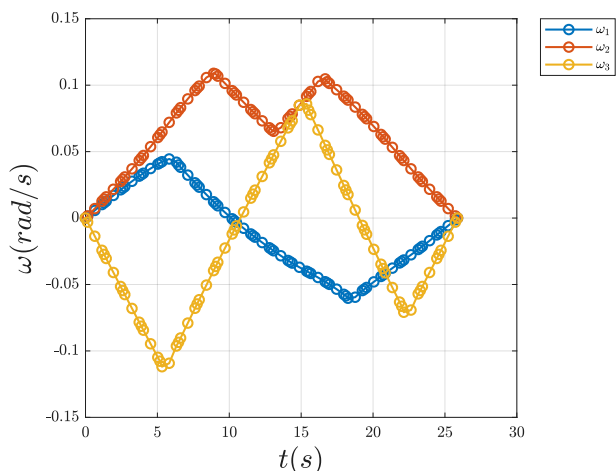
جدول ۲. مشخصات فضاپیمای تعقیب کننده



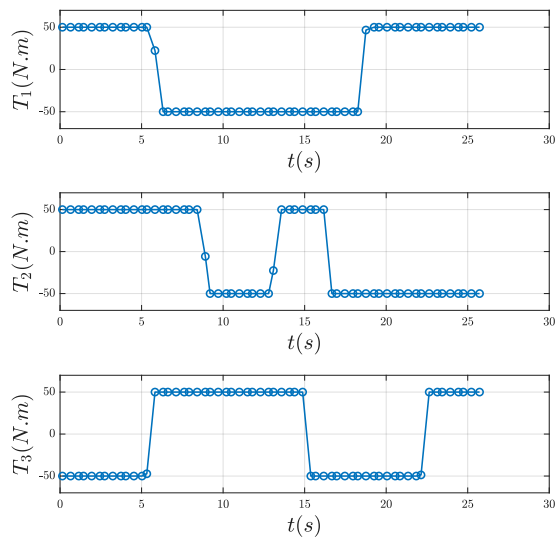
شکل ۴. تاریخچه زمانی نیروهای کنترلی

مانور وضعیت زمان بهینه یک فضاپیما با کنترل سه‌محوره‌ی مجزا نشان داده‌اند که اگرچه مانور وضعیت، یک چرخش خالص حول یک محور بدنی باشد، اما گشتاورهای کنترلی حول محورهای بدنی دیگر نیز برای دستیابی به زمان کمتر برای مانور وضعیت درگیر می‌شوند. نتایج سناریوی مورد نظر در شکل‌های ۳ و ۴ نشان می‌دهد که این موضوع را می‌توان برای یک مانور شش درجه آزادی زمان بهینه نیز تعمیم داد.

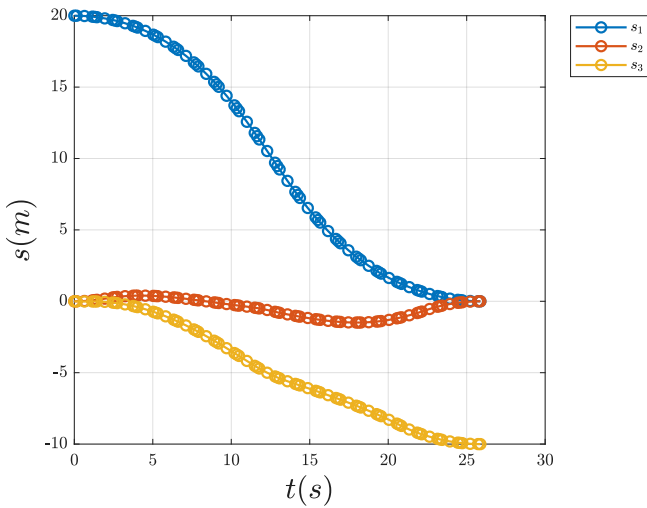
همان‌طور که در شکل‌های ۵ تا ۹ نشان داده شده است، بردارهای سرعت زاویه‌ای، وضعیت، سرعت نسبی و موقعیت فضاپیما تعقیب‌کننده به شرایط انتهایی مطلوب در جدول ۳ می‌رسند. شمانیک سه‌بعدی مانور شش درجه آزادی زمان بهینه برای سناریوی مورد نظر در شکل ۱۰ نشان داده شده است.



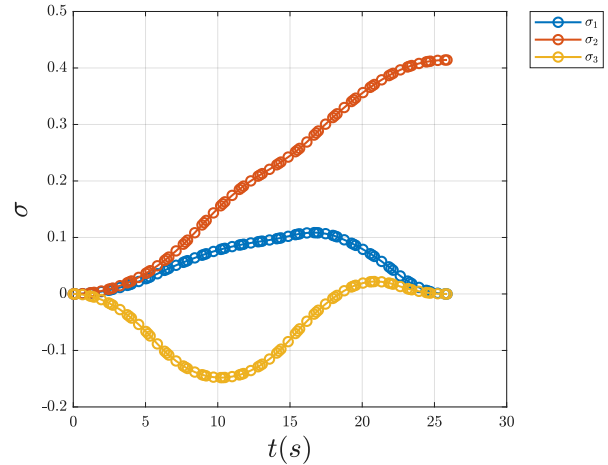
شکل ۵. تاریخچه زمانی مولفه‌های سرعت زاویه‌ای



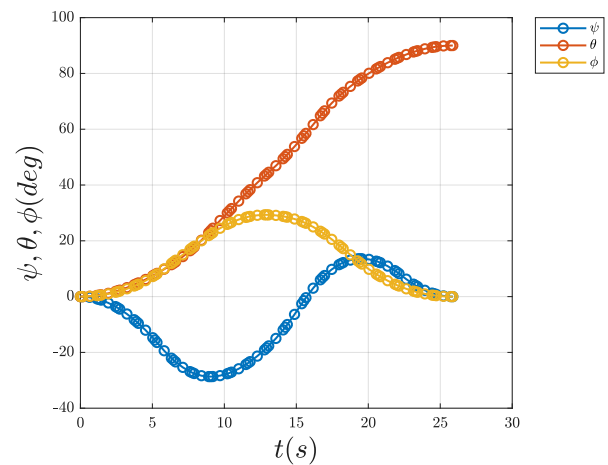
شکل ۳. تاریخچه زمانی گشتاورهای کنترلی



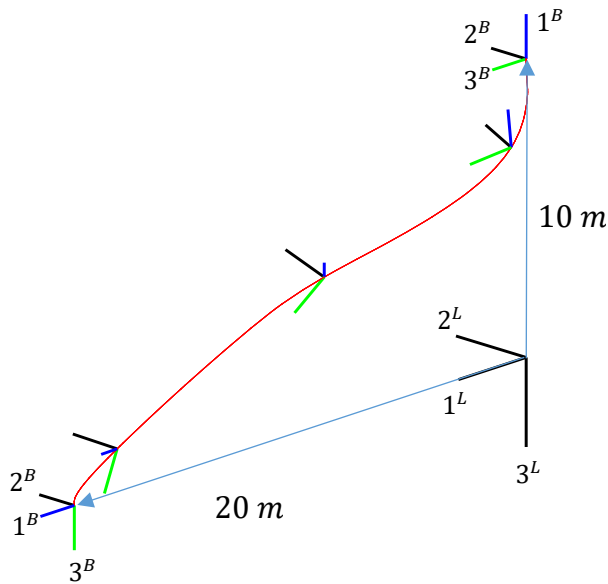
شکل ۹. تاریخچه زمانی موقعیت



شکل ۶. تاریخچه زمانی پارامترهای رودریگز اصلاح یافته

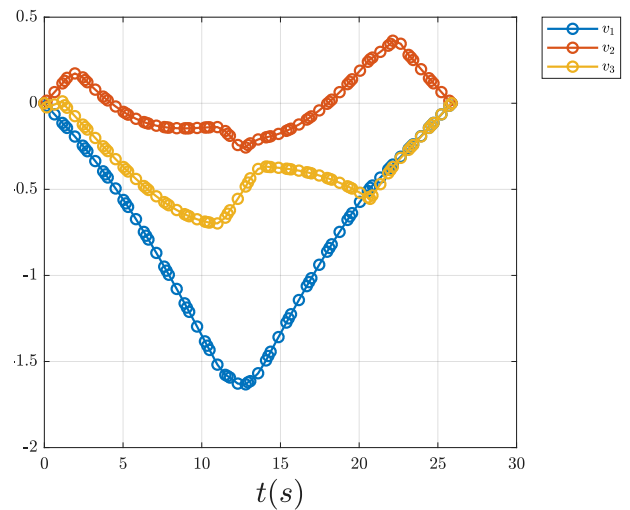


شکل ۷. تاریخچه زمانی زوایای اویلر



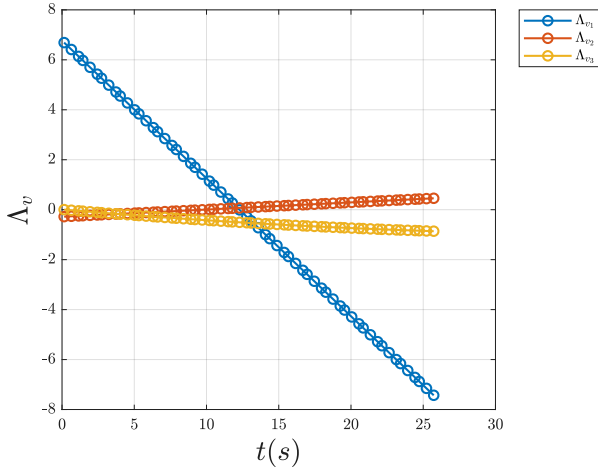
شکل ۱۰. شماتیک سه بعدی مانور شش درجه آزادی زمان بهینه

به منظور اثبات بهینگی مرتبه اول حل به دست آمده، از تخمین کمک حالت استفاده می شود. بر اساس قضیه ۱، با استفاده از ضرایب KKT که از حل مسئله برنامه ریزی غیرخطی به دست می آیند، می توان متغیرهای کمک حالت را در نقاط تطبیق و نقاط

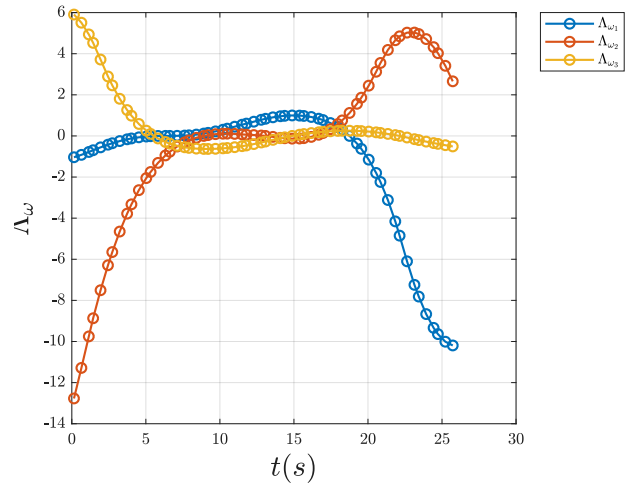


شکل ۸. تاریخچه زمانی مولفه های سرعت نسبی

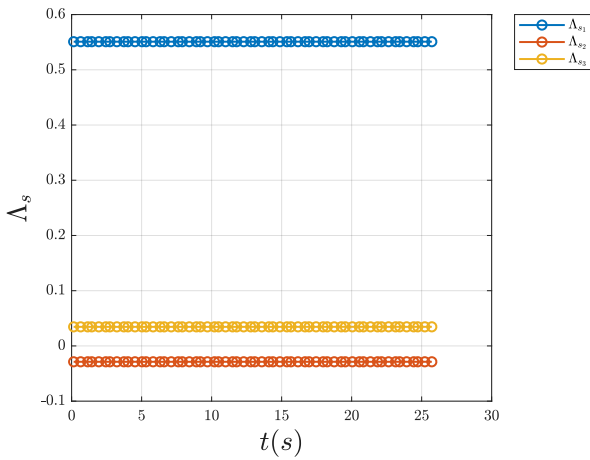
مرزی تخمین زد. نتایج تخمین کمک‌حالت در شکل‌های ۱۱ تا ۱۴ نشان داده شده است.



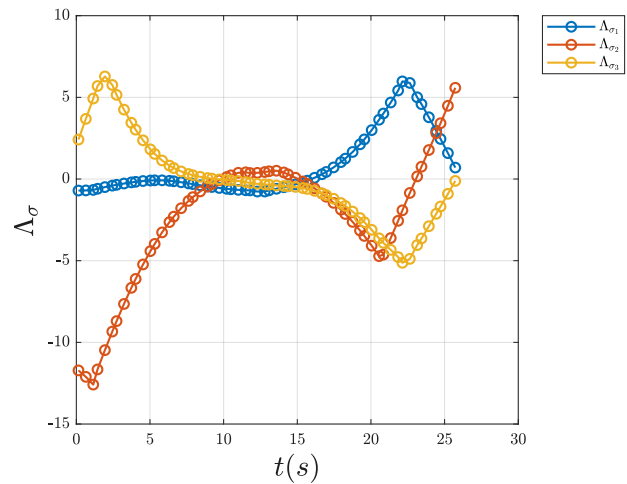
شکل ۱۳. تاریخچه زمانی کمک‌حالت‌های مربوط به سرعت نسبی



شکل ۱۱. تاریخچه زمانی کمک‌حالت‌های مربوط به سرعت زاویه‌ای



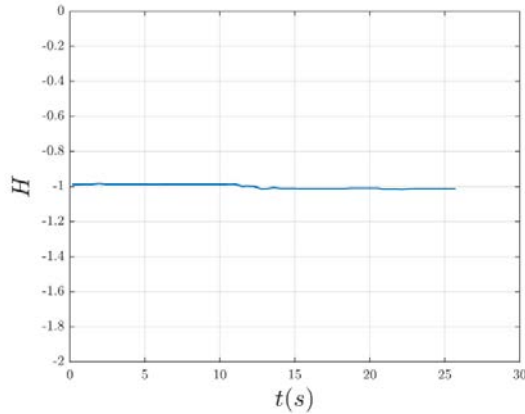
شکل ۱۴. تاریخچه زمانی کمک‌حالت‌های مربوط به موقعیت



شکل ۱۲. تاریخچه زمانی کمک‌حالت‌های مربوط به پارامترهای رودریگز اصلاح‌یافته

با در نظر گرفتن تابع هزینه به صورت معادله (۸)، برای مسئله کنترل بهینه کمترین زمان مورد نظر، تابع‌های $\phi(x(t_0), t_0, x(t_f), t_f)$ و $g(x(t), u(t), t)$ به صورت زیر هستند:

$$\begin{aligned} \phi(x(t_0), t_0, x(t_f), t_f) &= t_f \\ g(x(t), u(t), t) &= 0 \end{aligned} \quad (38)$$



شکل ۱۵. تاریخچه زمانی همیلتونین

در این قسمت برای سناریوهای مختلف، نتایج به دست آمده از حل مسئله کنترل بهینه با استفاده از روش شبه‌طیفی گاوس با نتایج نرم افزار GPOPS [۵۲] مقایسه شده است. بدین منظور، مسئله مانور شش درجه آزادی زمان بهینه با در نظر گرفتن موقعیت‌های اولیه مختلف فضایی تعقیب کننده نسبت به دستگاه مرجع مداری هدف حل شده است. مدت زمان مانور شش درجه آزادی زمان بهینه برای سناریوهای مختلف در جدول ۴ بیان شده است.

جدول ۴. نتایج تطبیقی روش شبه‌طیفی گاوس و نرم افزار GPOPS برای سناریوهای مختلف

موقعیت اولیه (m)	t_f روش شبه‌طیفی گاوس (sec)	t_f نرم افزار GPOPS (sec)	درصد تغییرات (%)
$[20,0,0]^T$ سناریوی اصلی	25.8727	25.87	0.0104
$[20,4,0]^T$	26.1674	26.0336	0.5113
$[20,4,4]^T$	25.9360	26.1652	0.8837

همچنین در این شبیه‌سازی، شرایط مرزی $\phi(x(t_0), t_0, x(t_f), t_f)$ مشخص هستند و تابعی از t_f نیستند (مطابق جدول ۳). بنابراین، بر اساس شرایط بهینگی مرتبه اول در معادله (۳۶) خواهیم داشت:

$$H(t_f) = -1$$

از طرفی تابع همیلتونین در معادله (۳۵) برای مسئله کنترل بهینه مورد نظر به صورت معادله (۳۹) است:

$$H(x, \lambda, \mu, u, \tau; t_0, t_f) = \lambda^T f(x, u, \tau; t_0, t_f) \quad (39)$$

با توجه به قیود دینامیکی در معادله (۱۳)، تابع همیلتونین در معادله (۳۹) تابعی از زمان نیست. در نتیجه:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

بنابراین، تابع همیلتونین باید در طول بازه زمانی مانور زمان بهینه ثابت و برابر با -۱ باشد.

$$H(t) = -1$$

نمودار زمانی تابع همیلتونین در شکل ۱۵ نشان می‌دهد که در طول بازه زمانی مانور، تابع همیلتونین محاسبه شده تقریباً ثابت و مقدار تقریبی آن برابر با -۱ است. بنابراین حل به دست آمده شرایط بهینگی مرتبه اول را برآورده می‌کند.

تعارض منافع

هیچ گونه تعارض منافع توسط نویسندگان بیان نشده است.

تشکر و قدردانی

اد

0.9271	25.8986	25.6607	$[20,4,-5]^T$
1.5325	28.2784	28.7185	$[25,-5,-5]$

مراجع

- [1] W. Zhang et al., "WTS: A Weakly towards strongly supervised learning framework for remote sensing land cover classification using segmentation models". *Remote Sensing*, 2021. 13(3): p. 394.
- [2] A. Orynbaikyzy, U. Gessner & C. Conrad, "Crop type classification using a combination of optical and radar remote sensing data: a review". *international journal of remote sensing*, 2019. 40(17): p. 6553-6595.
- [3] J. Jung et al., "The potential of remote sensing and artificial intelligence as tools to improve the resilience of agriculture production systems". *Current Opinion in Biotechnology*, 2021. 70: p. 15-22.
- [4] Q. Xie et al., "Crop height estimation of corn from multi-year RADARSAT-2 polarimetric observables using machine learning". *Remote Sensing*, 2021. 13(3): p. 392.
- [5] G.A. Carter, "Responses of leaf spectral reflectance to plant stress". *American Journal of Botany*, 1993. 80(3): p. 239-243.
- [6] J. Peñuelas et al., "Reflectance indices associated with physiological changes in nitrogen-and water-limited sunflower leaves". *Remote sensing of Environment*, 1994. 48(2): p. 135-146.
- [7] H.C. Stimson et al., "Spectral sensing of foliar water conditions in two co-occurring conifer species: *Pinus edulis* and *Juniperus monosperma*". *Remote Sensing of Environment*, 2005. 96(1): p. 108-118.
- [8] C. Xu et al., "Monitoring crop water content for corn and soybean fields through data fusion of MODIS and Landsat measurements in Iowa". *Agricultural Water Management*, 2020. 227: p. 105844.
- [9] J. Penuelas, I. Filella, C. Biel, L. Serrano & R. Save, "The reflectance at the 950-970 nm region as an indicator of plant water status". *International Journal of Remote Sensing*, 1993. 14: p. 1887-1905.
- [10] S.L. Ustin et al., "Estimating canopy water content of chaparral shrubs using optical methods". *Remote Sensing of Environment*, 1998. 65(3): p. 280-291.
- [11] J. Carlson, and R. Burgan, "Review of users' needs in operational fire danger estimation: the Oklahoma

با توجه به نتایج ارائه شده در جدول ۴، نتایج به دست آمده از حل مسئله کنترل بهینه با استفاده از روش شبه طیفی گاوس، مطابقت مناسبی با نتایج حل مسئله کنترل بهینه با استفاده از نرم افزار GPOPS دارد و حتی در مواردی مدت زمان مانور زمان بهینه کمتر نیز است.

۷- نتیجه گیری

در این پژوهش مسئله مانور شش درجه آزادی زمان بهینه برای یک فضایپایما با عملگرهای مجزا برای کنترل وضعیت و موقعیت مورد بررسی قرار گرفت. به عنوان یک نمونه از مانور شش درجه آزادی، مسئله کنترل بهینه کمترین زمان برای مانور مجاورت بین دو فضایپایما فرمول بندی شده و با استفاده از روش شبه طیفی گاوس حل شد. سپس، با استفاده از ضرایب KKT، تخمین کمک حالت انجام شد.

نتایج شبیه سازی نشان داد که برای مسئله مانور شش درجه آزادی زمان بهینه مورد نظر، ساختار کنترلی به صورت بنگ-بنگ است. به منظور صحت سنجی حل به دست آمده، با استفاده از تخمین کمک حالت نشان داده شد که نتایج به دست آمده شرایط بهینگی مرتبه اول را برآورده می کند. در نهایت برای سناریوهای مختلف، مدت زمان مانور شش درجه آزادی زمان بهینه به دست آمده از حل مسئله کنترل بهینه با استفاده از روش شبه طیفی گاوس، با نتایج به دست آمده از حل مسئله کنترل بهینه با استفاده از نرم افزار GPOPS مقایسه شد. نتایج این مقایسه نشان داد که حل به دست آمده با استفاده از روش شبه طیفی گاوس مطابقت خوبی با نتایج نرم افزار GPOPS دارد.

- example". *International Journal of remote sensing*, 2003. 24(8): p. 1601-1620.
- [12] E. Chuvieco et al., Improving burning efficiency estimates through satellite assessment of fuel moisture content. *Journal of Geophysical Research: Atmospheres*, 2004. 109(D14).
- [13] W. Kong et al., "Estimating Vertical Distribution of Leaf Water Content within Wheat Canopies after Head Emergence". *Remote Sensing*, 2021. 13(20): p. 4125.
- [14] A.F. Goetz et al., "Imaging spectrometry for earth remote sensing". *science*, 1985. 228(4704): p. 1147-1153.
- [15] P.J. Curran, J.A. Kupiec and G.M. Smith, "Remote sensing the biochemical composition of a slash pine canopy. *Geoscience and Remote Sensing*", *IEEE Transactions on*, 1997. 35(2): p. 415-420.
- [16] R. Colombo et al., "Estimation of leaf and canopy water content in poplar plantations by means of hyperspectral indices and inverse modeling". *Remote Sensing of Environment*, 2008. 112(4): p. 1820-1834.
- [17] M. Hardisky, V. Klemas and M. Smart, "The influence of soil salinity, growth form, and leaf moisture on the spectral radiance of". *Spartina alterniflora*, 1983. 49: p. 77-83.
- [18] B. C. Gao, "Normalized difference water index for remote sensing of vegetation liquid water from space". in *Imaging Spectrometry*. 1995. International Society for Optics and Photonics.
- [19] G. Krishna et al., "Application of thermal imaging and hyperspectral remote sensing for crop water deficit stress monitoring". *Geocarto International*, 2021. 36(5): p. 481-498.
- [20] R. Filgueiras et al., "Soil water content and actual evapotranspiration predictions using regression algorithms and remote sensing data". *Agricultural Water Management*, 2020. 241: p. 106346.
- [21] L. Zhang et al., "Monitoring cotton (*Gossypium hirsutum* L.) leaf ion content and leaf water content in saline soil with hyperspectral reflectance". *European Journal of Remote Sensing*, 2014. 47: p. 593-610.
- [22] E.B. Knipling, "Physical and physiological basis for the reflectance of visible and near-infrared radiation from vegetation". *Remote sensing of environment*, 1970. 1(3): p. 155-159.
- [23] C.J. Tucker, "Remote sensing of leaf water content in the near infrared". *Remote sensing of Environment*, 1980. 10(1): p. 23-32.
- [24] P. Ceccato et al., "Detecting vegetation leaf water content using reflectance in the optical domain". *Remote sensing of environment*, 2001. 77(1): p. 22-33.
- [25] P.J. Zarco-Tejada and S. Ustin. "Modeling canopy water content for carbon estimates from MODIS data at land EOS validation sites". in *IGARSS 2001. Scanning the Present and Resolving the Future. Proceedings. IEEE 2001 International Geoscience and Remote Sensing Symposium (Cat. No. 01CH37217)*. 2001. IEEE.
- [26] M.R. Mobasheri, and S.B. Fatemi, "Leaf Equivalent Water Thickness assessment using reflectance at optimum wavelengths". *Theoretical and Experimental Plant Physiology*, 2013. 25(3): p. 196-202.
- [27] R. Pu et al., "Spectral absorption features as indicators of water status in coast live oak (*Quercus agrifolia*) leaves". *International Journal of Remote Sensing*, 2003. 24(9): p. 1799-1810.
- [28] P. Bowyer and F. Danson, "Sensitivity of spectral reflectance to variation in live fuel moisture content at leaf and canopy level". *Remote Sensing of Environment*, 2004. 92(3): p. 297-308.
- [29] E.R. Hunt et al., "Remote sensing leaf chlorophyll content using a visible band index". 2011.
- [30] D.M. Kim et al., "Highly sensitive image-derived indices of water-stressed plants using hyperspectral imaging in SWIR and histogram analysis". *Scientific reports*, 2015. 5(1): p. 1-11.
- [31] F. Rasheed, S. Delgrange, and F. Lorenzetti, "Detection of plant water stress using leaf spectral responses in three poplar hybrids prior to the onset of physiological effects". *International Journal of Remote Sensing*, 2020. 41(14): p. 5127-5146.



COPYRIGHTS

© 2022 by the authors. Licensee Iranian Space Research Center of Iran. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)